ISSN 0130-2221

ДЕКАБРЬ

2018 · № 12

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ТРИ КУБА

Прошедший в августе этого года в калифорнийском городе Сан-Диего очередной, 38-й по счету съезд любителей головоломок подарил всем нам много замечательных поводов поломать голову. Полный список представленных головоломок можно найти на сайте johnrausch.com/designcompetition/2018. А в нашей «Коллекции головоломок» мы стараемся рассказывать о тех из них, которые несложно смастерить дома, чтобы читатели могли сами порешать понравившиеся задачи.

Головоломка японского изобретателя Ичиро Коно (Ichiro Kohno) была высоко оценена участниками съезда за лаконичность и внешнюю простоту: даны три одинаковые детали, которые надо сложить так, чтобы получились три кубика. Каждая деталь склеена из двух брусочков 2×2×1. На фотографии видны точки в центрах брусочков – это магнитики, которые помогут удержать детали вместе, когда головоломка будет решена.

Е.Епифанов

КВАНТ

ДЕКАБРЬ 2018 №12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Георгий Феодосьевич Вороной

Н.ДОЛБИЛИН

Георгию Феодосьевичу Вороному судьбой было отмерено всего сорок лет. За свою короткую жизнь Вороной опубликовал не так много: 6 больших мемуаров и 6 относительно небольших заметок, всего 12 работ.

Однако имя Г.Ф.Вороного навсегда вписано золотыми буквами в историю науки как одного из крупнейших математиков, когда-либо работавших в теории чисел. Наряду с Г.Минковским Вороной является создателем новой области математики – геометрии чисел, а знаменитые «диаграммы Вороного» не только стали геометрическим инструментом исследований в математике, в физике, в кристаллографии, в химии, в геологии, но и нашли применение даже в кинематографе.

Детство

Георгий Феодосьевич Вороной родился 16(28) апреля 1868 года в украинской семье в имении своего отца – в селе Журавка, расположенном в очень живописном уголке Полтавской губернии Российской империи (ныне Черниговской области Украины). Отец Вороного получил филологическое образование в Киевском университете и преподавал русскую литературу в гимназии, работал директором гимназий в Бердянске, Кишиневе, Прилуках.

Георгий Вороной начал свое школьное образование в Бердянске, а закончил в Прилукской гимназии в 1885 году. Вороной вел дневник, из которого мы знаем многое о его жизни. В частности, детство его протекало в очень теплой семейной атмосфере. У мальчика было несколько серьезных увлечений: музыка (Георгий играл на двух инструментах: на фортепьяно и флейте), шахматы, литература, самодеятельный театр, в котором он исполнял роли и ставил спектакли.

Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908)

В гимназические годы у Георгия проявились незаурядные математические способности. Развитию его математического дарования содействовал учитель математики Иван Владимирович Богословский. Этот замечательный педагог оказал огромное влияние также на общее развитие Вороного, в том числе и на его литературные интересы. В университете Вороной, как и все студенты того времени, был увлечен идеями и творчеством Л.Н.Толстого. Ему также нравились реалистичные описания русской жизни, которые он находил в произведениях П.И.Мельникова-Печерского «В лесах» и «На горах». В то же время Вороной оставался равнодушным к

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20181201

Дом Вороного в Журавке

творчеству М.Е.Салтыкова-Щедрина. Однако его гимназический учитель математики, который сам был страстным почитателем творчества Щедрина, сумел передать это отношение и студенту Вороному, своему бывшему ученику.

В 1884 году профессор Киевского университета, известный математик В.П.Ермаков начал издавать «Журнал элементарной математики». В нем он предложил несколько тем для ученических работ по математике. На одну из них, а именно на тему «Разложение многочленов на множители, основанное на свойствах корней квадратных уравнений», была представлена единственная работа. Ее автором был Вороной. Работа понравилась Ермакову, и он опубликовал ее в своем журнале в 1885 году. В том же году Вороной закончил гимназию и поступил в Петербургский университет.

Учеба в Петербургском университете

Из дневника мы знаем, с каким огромным желанием и настойчивостью Георгий приступил к изучению математических курсов, которые «все более увлекали» его. Он приучился вставать около 5 утра и приступал к занятиям, которые продолжались до вечера. У Георгия была при себе иголка, которой он укалывал себя, чтобы острой болью сбить накатывавшуюся время от времени волну усталости.

В бытовом отношении жизнь студента Вороного складывалась непросто. Материальной помощи, которую мог оказать отец, явно не хватало. А после выхода отца в отставку в 1887 году и эта помощь сократилась. Так как университетскую стипендию Вороной начал получать лишь на последнем курсе, то он был вынужден давать за небольшие деньги уроки. Уроки его выматывали, а тяжелые условия в общежитии дополнительно осложняли и отдых и занятия математикой.

В этих условиях Вороной сконцентрировал все силы и волю на математике. «Главное, что меня занимает, есть ли у меня достаточно способностей», – пишет он в дневнике. К счастью, математических способностей у Вороного было в избытке, а «постоянно усиливающаяся страсть к математике» захватила его всецело. В «моменты, когда ум охватывает идею, которая раньше как мячик ускользала, я забываю, что я существую», – записывает в дневнике Вороной в 1887 году. Там же: «моими последними успехами я обязан привычке мыслить без пера и бумаги. Все предложения, доказанные мною, возникали совершенно независимо. ...Я надеюсь, что эта привычка мыслить таким образом сослужит мне службу».

Чтобы дополнительно развить математические способности, Вороной устраивал себе математический тренинг: последовательно решал трудные учебные задачи на вычисление сложных интегралов и симметрических функций, на интегрирование дифференциальных уравнений.

К счастью, в Петербургском университете в то время действовала блестящая математическая школа гениального математика Пафнутия Львовича Чебышёва (1821–1894), знаменитая Петербургская школа теории чисел. Чебышёв и его выдающиеся ученики А.А.Марков (старший), А.М.Ляпунов, А.Н.Коркин и др. поддерживали очень высокий уровень математического образования в Петербургском университете.

Научным руководителем Вороного стал академик Андрей Андреевич Марков. Под его руководством Вороной исследовал бернуллиевы числа, названные так еще в XVIII веке в честь представителя знаменитой математической династии Якова Бернулли. Бернуллиевы числа B_s вводятся рекуррентно и интересны, например, тем, что через них выражается сумма первых N натуральных чисел, возведенных в данную степень k:

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k} C_{k+1}^{s} B_s N^{k+1-s}.$$

Важность чисел Бернулли проявляется в разных областях математики: от теории чисел, где, например, Эйлер установил связь бернуллиевых чисел со значениями знаменитой ζ-функции Римана при четных значениях аргумента, до алгебраической топологии. Действительно, числа Бернулли вошли в топологию благодаря фундаментальным работам Ф.Хирцебруха, которые привели, в частности, к красивым результатам М.Кервера и Дж.Милнора о гомотопических группах сфер. Изучению свойств этих чисел посвящено много работ известных математиков.

Числа Бернулли B_s суть рациональные числа. Вороной в очень остроумной работе доказал следующее свойство бернуллиевых чисел. Пусть номер s бернуллиева числа B_s делится на m, а знаменатель числа B_s взаимно прост с m. Тогда числитель числа B_s делится на m.

Работа о бернуллиевых числах очень понравилась Маркову, и он рекомендовал ее к опубликованию. Вороной, требовательный и к себе и к работе, продолжал еще некоторое время улучшать рукопись. Статья «О числах Бернулли» вышла в «Сообщениях Харьковского математического общества» в 1890 году, через год после окончания университета. По результатам этих исследований Вороной защитил кандидатскую диссертацию (аналог нынешней дипломной работы) и был оставлен при университете «для подготовки к профессорскому званию» (соответствует нынешней аспирантуре).

К этому времени Вороной сложился в профессионального математика, сосредоточившего свои усилия на теории чисел. После окончания университета Вороной начинает исследования по теории алгебраических чисел.

Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами a_i:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Интерес к теории алгебраических чисел во многом был вызван ее связью с важным классом диофантовых уравнений[1]

$$f(x, y) = m,$$

где $f(x, y)$ – однородный многочлен n-й степени или, как иначе говорят, *форма* n-й степени от двух переменных с целыми коэффициентами. В случае $n = 2$ такие уравнения были полностью исследованы в работах великих математиков Эйлера, Лагранжа и др. Однако случай $n = 3$ в конце XIX века оставался почти неизученным.

Вороной начал исследование алгебраических чисел степени $n = 3$. Число α является алгебраическим числом степени 3, если минимальная степень среди степеней всех многочленов с рациональными коэффициентами, для которых α является корнем, равна 3. Очевидно, что многочлен минимальной степени для данного α не может разлагаться в произведение многочленов меньших степеней, коэффициенты которых также рациональны. Такой многочлен с рациональными коэффициентами, который не разлагается в произведение многочленов меньших степеней, называется *неприводимым*.

Магистерская диссертация Вороного (аналог нынешней кандидатской диссертации) «О целых алгебраических числах, зависящих от корня неприводимого уравнения 3-й степени» содержала первые результаты, полученные автором по данной теме, и была успешно защищена в Петербургском университете в 1894 году.

Работа в Варшавском университете

После защиты Вороной был назначен профессором математики Императорского Варшавского университета. В то время (после Венского конгресса 1815 года и

[1] Пусть $p(x_1, \ldots, x_n)$ – многочлен степени $n >$ > 0 с рациональными коэффициентами, тогда уравнение вида $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$, для которого ищутся решения в целых или рациональных числах, называется *диофантовым.*

вплоть до 1915 года) Польша входила как Царство Польское в состав Российской империи.

В университете Вороной читал курсы по основным математическим предметам. Одним из его учеников был выдающийся польский математик Вацлав Серпинский (1882–1969), которому принадлежит много достижений в разных областях математики. Серпинский выполнил под руководством Вороного работу по аналитической теории чисел.

Вороной продолжил исследования по теории алгебраических чисел 3-й степени. Он построил эффективный алгоритм для вычисления так называемых основных единиц кубического поля.

Это был очень сильный результат, поскольку знаменитая теорема Дирихле о единицах утверждала, что основные единицы в алгебраическом поле существуют. Однако она не давала никакого пути для их нахождения.

Алгоритм нахождения основных единиц для кубических полей, построенный Вороным, настолько поразил А.А.Маркова, что он послал Вороному телеграмму в Варшаву с просьбой срочно приехать в Петербург. Вороной так и поступил. Как только он появился в кабинете своего научного руководителя, ему тут же предложили найти основные единицы для одного частного случая, для которого Маркову самому удалось найти их при помощи весьма сложных вычислений. Поэтому Марков был восхищен, когда Вороному понадобилось всего три часа, чтобы посредством своего алгоритма решить задачу.

Замечательные результаты Вороного по этой теме были описаны в его последней, докторской, диссертации, блестяще защищенной в 1897 году. В этой диссертации, как писал Б.Н.Делоне, Вороной «мыслил геометрически, но вынужден был переводить ход своих рассуждений на арифметический язык». Парадоксально, но факт: руководители Петербургской школы теории чисел и особенно Марков, основной оппонент по диссертации, не принимали геометрический характер изложения, и диссертацию, написанную на геометрическом языке, могли и не пропустить. Петербургская академия наук отметила цикл работ Вороного по алгебраической теории чисел престижной премией имени В.Я.Буняковского.

Впоследствии алгоритм Вороного активно использовал Б.Н.Делоне в своих знаменитых исследованиях по диофантовым уравнениям третьей степени. Надо сказать, что Борис Николаевич Делоне (1890–1980) был наиболее последовательным продолжателем Вороного. Делоне не был и не мог быть его непосредственным учеником, поскольку Вороной умер в 1908 году, в том самом году, когда Борис Делоне поступил в Киевский университет. Тем не менее, Делоне близко знал Вороного. Дело в том, что Вороной познакомился и подружился с его отцом, профессором математики и механики Николаем Борисовичем Делоне, работавшим с 1900 по 1904 годы в Варшавском политехническом институте. Борис Николаевич любил вспоминать, как Вороной приходил к ним на ужин и допоздна засиживался за беседой с его отцом. А он, десятилетний мальчик, лежа в кровати, прислушивался к беседе, доносившейся из гостиной в его комнату через слегка неприкрытую дверь...

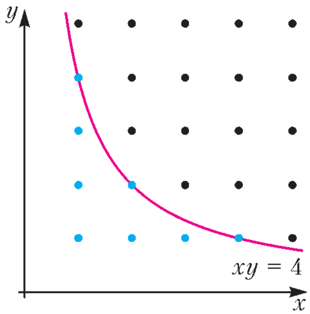
Судьбе было угодно, что в конце XX века имена Вороного и Делоне навсегда вошли в математику, более того, они оказались неразрывно связанными. Это так называемые диаграммы Вороного и триангуляции Делоне – понятия, важные в самых разных областях науки и ее приложений. (Во второй части статьи мы объясним, что такое диаграмма Вороного и как она связана с триангуляцией Делоне, описание которой было дано в Кванте №1, 2 за 2010 год в статье «Многогранный Делоне»).

После исследований по теории алгебраических чисел Вороной опубликовал в 1903 году большую работу по аналитической теории чисел, посвященную задаче о делителях, поставленной Дирихле. Нужно было оценить при больших n сумму

$$S(n) = \tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n),$$

где $\tau(k)$ – количество простых делителей числа k.

Нетрудно понять, что $S(n)$ равно количеству точек $(x; y)$ с целыми положительными координатами, произведение которых не превосходит n: $xy \le n$. Так как



$xy = n$ есть уравнение гиперболы, то эта задача получила название проблемы целых точек под гиперболой (см. рисунок).

В своей работе 1849 года Дирихле получил для $S(n)$ следующую формулу:

$$S(n) = n(\ln n + 2\gamma - 1) + K_n\sqrt{n}\,, \quad (1)$$

где $\gamma = 0{,}57721\ldots$ – константа Эйлера и значение $|K_n|$ ограниченно при $n \to \infty$. В дальнейшем на протяжении полувека многочисленные усилия известных математиков, направленные на уточнение порядка относительно n второго слагаемого в (1) (или, как говорят математики, остаточного члена), оставались безуспешными. И только в 1903 году Г.Ф.Вороной, основательно развив метод Дирихле, в результате сложных вычислений улучшил порядок остаточного члена в формуле (1) для $S(n)$:

$$S(n) = n(\ln n + 2\gamma - 1) + \theta_n\sqrt[3]{n}\ln n\,, \quad (2)$$

где значение θ_n ограничено некоторой постоянной при $n \to \infty$.

Работа Вороного о числе целых точек под гиперболой оказала влияние на творчество ряда замечательных математиков, в частности Ивана Матвеевича Виноградова, в будущем основателя и директора Математического института имени В.А.Стеклова. А ученик Вороного Серпинский успешно применил его метод к другой классической задаче о числе $A(n)$ целых точек $(x; y)$ в круге $x^2 + y^2 \le n$.

Итак, варшавский период начался с исследований по теории алгебраических чисел. Затем последовала атака на аналитическую проблему точек под гиперболой. Последние 4 года этого периода и, к глубокому сожалению, жизни в целом, Вороной посвятил труднейшим задачам геометрии чисел. Одна из них – задача нахождения плотнейшей упаковки пространства равными шарами. Другая – задача нахождения всех параллелоэдров – многогранников, которые заполняют пространство своими копиями, расположенных параллельно друг другу. Именно здесь, на геометрическом направлении, Вороной получает свои самые интересные и глубокие результаты. Мы опишем их во второй части статьи.

О НЕматематике

В Варшавском университете Вороной проработал с 1894 года до конца жизни с небольшим перерывом. В связи с революционными волнениями 1905–1907 годов Варшавский университет был закрыт, и Вороной был направлен на работу в Новочеркасск, в только что организованный там Донской политехнический институт, где в 1907/08 учебном году был деканом факультета механики. В 1907 году за выдающиеся научные достижения Вороной был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

Г.Ф.Вороной был женат на Ольге Митрофановне Крицкой, девушке из дворянской семьи, чье имение Богданы находилось поблизости от его Журавки. Ольга была его большая и единственная любовь. У них было шестеро детей. Помимо своей многочисленной семьи, Вороной заботился также о семье рано овдовевшей сестры с семью детьми. Все дети Георгия Феодосьевича получили хорошее образование и стали врачами, учителями. Младший сын Юрий Георгиевич Вороной (1896–1961), хирург, доктор медицинских наук, прославился тем, что в 1933 году сделал первую в мире пересадку почки.

Г.Ф.Вороной не отличался крепким здоровьем, в последние годы страдал от прогрессирующей болезни желчного пузыря. Интенсивная научная и преподавательская работа усугубляла болезнь. В последний год жизни врачи настаивали на отдыхе. Вороной и сам отчетливо понимал, что напряженная работа отрицательно сказывается на здоровье, но оставить исследования было выше его сил. «Только моя жена знает, что математика является для меня главной целью жизни, она для меня – все», – записал он в дневнике.

Лето 1908 года Георгий Феодосьевич провел в родной Журавке, несмотря на рекомендации врачей поехать на лечение в Карлсбад. К началу учебного года ему становится легче, и он возвращается в Варшаву. В начале сентября пишет, как оказалось, последнее письмо академику В.А.Стеклову, в котором кратко сообщает о своих исследованиях по теории параллелоэдров, а также выражает желание перейти в Петербургский университет.

Однако в октябре наступило резкое обострение болезни. В последний месяц жизни, страдая от болей, прикованный к постели, Вороной сумел записать «Заметки по поводу последней теоремы Ферма». Через две недели, 7(20) ноября 1908 года, в возрасте сорока лет Георгий Феодосьевич Вороной скончался. Похоронен по завещанию в его любимой Журавке.

(Продолжение следует)

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

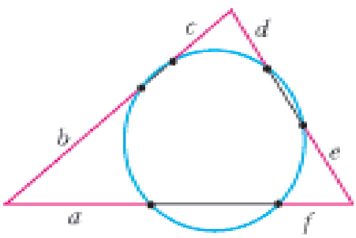
Желаем успеха!

13. Можно ли рассадить за круглым столом через равные промежутки между людьми а) 20, б) 19 молчунов и несколько болтунов так, чтобы напротив каждого молчуна сидел болтун и чтобы никакие два болтуна не сидели рядом?

А.Ковальджи

14. Окружность пересекает стороны треугольника в 6 точках (см. рисунок).

а) Докажите, что если $a = b$ и $c = d$, то $e = f$.



б) Докажите, что если $b = c$ и $d = e$, то $f = a$.

Е.Бакаев

15. Пусть A – наименьшее, а B – наибольшее из восьмизначных чисел, в записи которых присутствует каждая из цифр 1, 2, …, 8 и которые делятся на 137. Докажите, что $A + B$ делится на 73.

С.Костин

16. Обозначим как P_N число способов выбрать из N различных предметов любое количество предметов, дающее остаток 1 при делении на 3, а как Q_N – число способов выбрать из N различных предметов любое количество предметов, дающее остаток 2 при делении на 3. Докажите, что P_N и Q_N отличаются не больше чем на 1.

Е.Бакаев

Физика звука

И.ЕСИПОВ

АКУСТИКА – ЭТО РАЗДЕЛ ФИЗИКИ, ИЗУчающий возбуждение, распространение, прием звуковых волн, а также их взаимодействие со средой. Особенностью звуковых волн, отличающих их от электромагнитных или гравитационных, является то, что они могут распространяться только в сплошной упругой среде. Звук окружает нас повсюду: в атмосфере, под водой, под землей, в биологических средах и материалах и даже в космосе. Только звук может распространяться в земных структурах и под водой без существенного затухания, поэтому он широко используется в исследованиях природных сред.

Обычно мы называем звуком то, что мы слышим. Принято считать, что диапазон частот слышимого нами звука лежит в пределах от 20 Гц до 20 кГц. Это соответствует 20–20000 колебаний в секунду. Звуковые волны, частота колебаний которых выходит за этот диапазон, получили свои специальные названия.

Ультразвуком называют звуковые волны, частота колебаний которых выше 20 кГц. Технологически развитый диапазон применения ультразвука лежит в пределах об 20 кГц до 100 МГц. Более высокочастотная область ультразвука получила название *гиперзвук*. Звуковые волны гиперзвуковых частот могут распространяться только в кристаллах с малым поглощением звука, таких, как монокристаллы кварца, сапфира, ниобата лития, железо-иттриевого граната и др. Гиперзвук используется при обработке больших массивов информации, в том числе оптических изображений, и исследовании строения твердых тел. Этим занимается наука акустоэлектроника. Диапазон, в котором гиперзвук возбуждается искусственным, контролируемым образом, ограничивается частотами порядка 10 ГГЦ, что связано с высоким затуханием. При столь высоких частотах длина волны такого звука будет уже соизмеримой с межатомным расстоянием в кристалле. В таком случае мы уже не можем считать кристалл сплошной средой.

Звуковые волны, частота которых ниже 20 Гц, называют *инфразвуком*. Затухание инфразвука невелико, и поэтому инфразвуковые волны активно используются для исследования океана и структуры земли. Звуки взрывов вулканов могут обогнуть весь земной шар, низкочастотный подводный звук распространяется через океаны на тысячи километров.

Далее мы обсудим современные идеи и новые акустические технологии исследования и освоения окружающего мира. Часто акустические методы не имеют альтернативы и поэтому оказываются наиболее эффективными для решения той или иной важной задачи.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20181202

Звук и инфразвук в исследовании природы

Исследование океана. Звуковые волны распространяются в природе – в атмосфере, океане, под землей – по своеобразным каналам. Открытие подводного звукового канала было сделано в нашей стране в 1946 году, когда ученые вместе с военными моряками испытывали в Японском море акустическую аппаратуру для проведения измерений подводного звука от взрыва американской атомной бомбы на атолле Бикини. В процессе испытаний регистрировался уровень акустического сигнала от взрывов глубинных бомб в зависимости от расстояния. Неожиданно выяснилось, что для дистанций больше 50 км уровень зарегистрированных сигналов стал очень слабо меняться с расстоянием и звуки взрывов глубинных бомб были хорошо слышны и на дистанции 600 км, когда опыт был прекращен. Ожидалось, что для большого океана далеко от берега акустический сигнал должен распространяться по сферическому закону от точечного источника, каким можно было считать глубинную бомбу. В таком случае интенсивность звука должна быть обратно пропорциональной площади сферы, охватывающей источник, т.е. должна была уменьшаться обратно пропорционально квадрату расстояния, пройденного звуком.

Объяснение этому интересному эффекту дал Л.М. Бреховских – впоследствии академик и лауреат Государственной премии СССР. Он обратил внимание на то, что температура воды быстро падает до глубины 100–200 м, а затем принимает постоянное значение около 4 °C. Падение температуры приводит к уменьшению скорости распространения звука, а рост давления с глубиной приводит к увеличению этой скорости. Таким образом, в зависимости скорости распространения звука от глубины оказывается минимум, в котором и концентрируется акустическая энергия. На рисунке 1 видно, что если поместить излучатель на уровень минимума скорости звука, то звуковые лучи, выходящие из излучателя, в результате рефракции будут удерживаться вблизи этого минимума. В итоге часть звуковых лучей, вышедших из источника под не очень крутыми углами, остаются при распространении в слое толщиной в несколько сот метров. Такой слой представляет собой подводный акустический волновод, или подводный звуковой канал.

Стоит отметить, что эффект акустического волновода использовался средневеко-

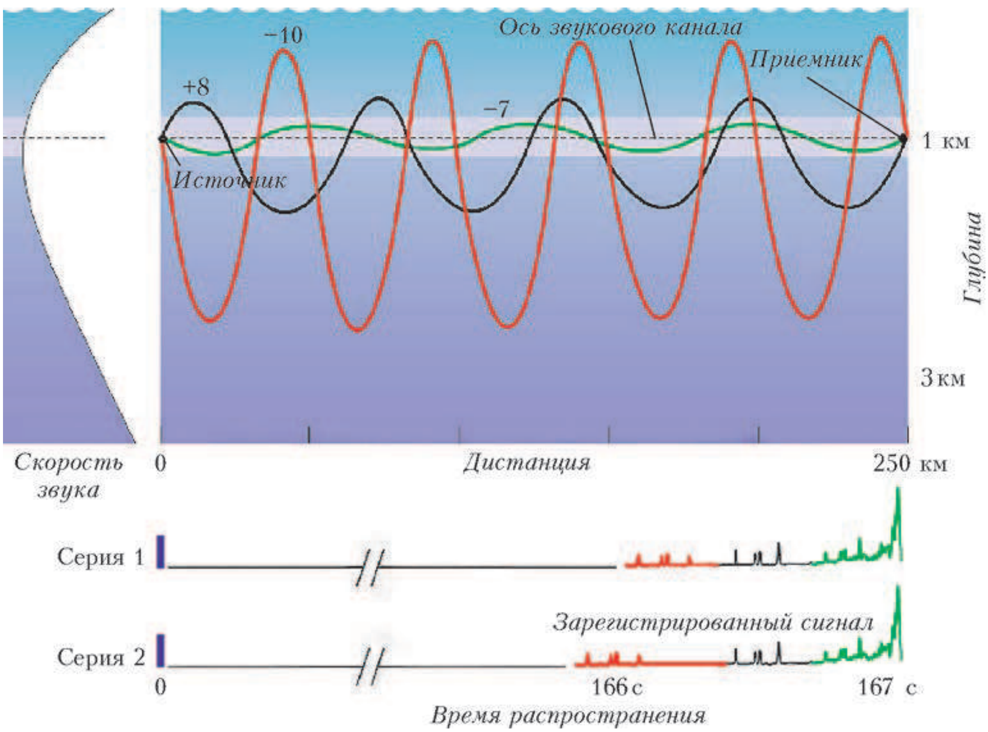


Рис. 1. Схематическое изображение распространения сигнала в подводном звуковом канале. Слева – профиль скорости звука в зависимости от глубины. Источник и приемник звука расположены на оси канала, соответствующей минимальной скорости звука. Лучи в результате рефракции звука совершают циклические осцилляции. Цифры над лучами указывают угол выхода луча из источника. В нижней части рисунка показаны две серии осциллограмм зарегистрированных сигналов, отличающихся температурными условиями в приповерхностной части канала

выми мастерами при создании «шепчущих» галерей. Такие галереи имеют кривые или замкнутые стены. Если вы вблизи такой стены говорите шепотом, то звуковые лучи концентрируются около нее и на расстоянии в несколько десятков метров можно отчетливо слышать ваш шепот, находясь также около стены. Такие шепчущие галереи есть в соборах Святого Павла в Лондоне и Святого Петра в Риме, в Храме Неба под Пекином и, возможно, где-то еще.

Характер распространения звука в акустическом волноводе аналогичен распространению лазерного излучения в оптическом волноводе. В настоящее время особенности распространения звука в подводном акустическом волноводе используются для термометрии океана.

Океан можно рассматривать как гигантский, занимающий огромную площадь термометр. Следя за изменениями температуры глубинных слоев океана, можно следить за потеплением климата. Дело в том, что масштабные климатические изменения надежно определить чрезвычайно трудно из-за больших флуктуаций во времени и пространстве. Огромные массы воды в океане усредняют эти флуктуации. Определить среднюю температуру глубинных слоев океана на масштабах в несколько тысяч километров можно только акустическими методами, электромагнитные волны в морской воде не распространяются на заметное расстояние.

Скорость распространения звука увеличивается с ростом температуры. На рисунке 1 внизу показаны две серии зарегистрированных акустических импульсов, отличающихся тем, что во второй серии верхние слои океана имели несколько более высокую температуру, чем в первой. Как видно, сигналы, распространяющиеся по красному лучу, который максимально близко подходит к нагретой поверхности океана, приходят несколько раньше, чем сигналы, распространяющиеся по другим лучам. Для дистанции 250 км эти изменения во времени распространения могут составлять доли секунды. По другим лучам изменений во времени распространения нет. Таким образом, из такого опыта можно узнать, на сколько градусов и на какую глубину прогрелась вода в океане. Ясно, что чем больше дистанция распространения звука, тем выше чувствительность этого метода. Звук пробегает 250 км в океане за 167 с, что соответствует скорости распространения около 1500 м/с. Заметим, что первыми приходят наиболее быстрые сигналы, распространяющиеся по наиболее крутым лучам, лежащим в слоях океана с большей скоростью распространения. А наиболее интенсивные сигналы приходят последними по пологим лучам, находящимся в окрестности оси подводного звукового канала, где скорость распространения минимальна.

Такая особенность распространения звука используется для дистанционного мониторинга теплопереноса в океане, что важно для прогнозирования климата. Океан формирует погоду на земле. Северный Ледовитый океан является кухней погоды для Европы и существенной части Азии. Распределенная по всему океану система излучателей и приемников звука может решать самые разнообразные задачи. Среди них можно выделить измерение времени распространения сигналов на протяженных трассах для определения содержания тепла и циркуляции океанических вод как на масштабах всего океана, так и в отдельных его частях; обеспечение подводного позиционирования и навигации подо льдом; мониторинг динамики льда, землетрясений и перемещения морских животных при пассивном прослушивании акватории океана. Все эти процедуры система может выполнять в реальном времени.

Исследование атмосферы. Распространение звука в атмосфере подчиняется тем же самым законам, что и распространение звука в океане, с той разницей, что скорость распространения звука в воздухе в нормальных условиях у поверхности земли составляет 340 м/с. Это существенно меньше скорости звука в воде.

На рисунке 2 представлена схема звуковых лучей, выходящих из источника звука в атмосфере. Как видно, в присутствии ветра лучи по-разному ведут себя в зависимости от направления распространения.

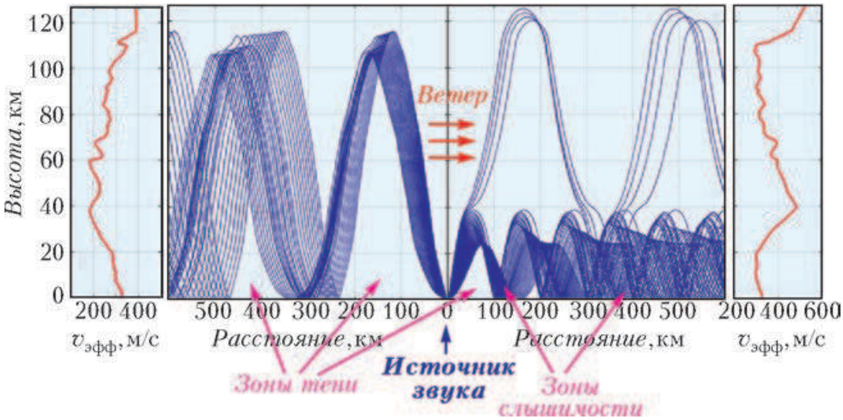


Рис. 2. Схема звуковых лучей, выходящих из источника звука в атмосфере в присутствии ветра

Поток воздуха увеличивает скорость распространения звука по ветру и несколько снижает ее в противоположном направлении. Как правило, приземный поток воздуха или ветер увеличивает свою скорость с высотой. Скорость распространения звука по ветру на большой высоте больше, чем у земли, поэтому фронт звуковой волны при подъеме вверх заворачивается и волна направляется вниз, где скорость меньше. Возникает рефракция звука. Благодаря этому в приповерхностном слое атмосферы образуется звуковой волновод, в котором концентрируется звук, и на поверхности земли можно регистрировать акустические сигналы, которые распространялись на высоте в несколько десятков километров. Эффект рефракции при распространении против ветра приводит к тому, что звук быстро уходит на большую высоту (десятки километров). Поэтому мы плохо слышим против ветра и хорошо по ветру.

Приземный звуковой волновод может образоваться не только в результате ветра. В тихий безветренный морозный день где-то за городом можно далеко слышать лай собак или шум машины. В такую погоду в приземной атмосфере возможна так называемая температурная инверсия. Обычно температура воздуха понижается с высотой, но в морозный день температура у поверхности земли, особенно в низине, может быть ниже, чем на некоторой высоте. Минимальная температура в приземном слое воздуха соответствует минимуму скорости распространения звука. Таким образом, температурная инверсия обеспечивает волноводное распространение звука у поверхности земли.

На рисунке 3 показано распределение температуры с высотой в атмосфере. Как видно, эта характеристика, как и в океане, имеет слоистую структуру. В областях нижней границы стратосферы (тропопауза) и нижней границы термосферы (мезопауза) температура, а следовательно, и скорость распространения звука достигают минимума. Здесь выполняются усло-

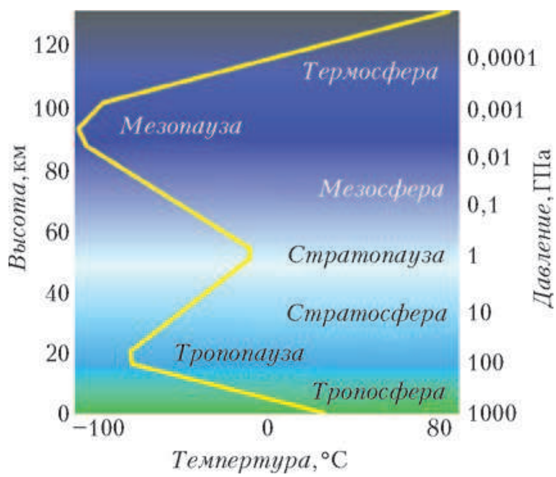


Рис. 3. Стратификация температуры в атмосфере. Изменение давления показано в гектапаскалях (1 гПа = 100 Па). В областях тропопаузы и мезопаузы температура, а следовательно, и скорость распространения звука достигают минимума. Здесь находятся атмосферные звуковые каналы

вия для существования атмосферных звуковых каналов. Звуковые волны от извержений вулканов или наземных взрывов распространяются по этим каналам на огромные расстояния и даже могут обогнуть Земной шар. Поэтому средняя атмосфера (от 20 до 120 км высоты) является хорошим проводником инфразвука. Это свойство атмосферы позволило ученым разработать методику инфразвукового зондирования атмосферы, базирующейся на явлении рассеяния акустических импульсов на слоистых неоднородностях скорости ветра и температуры атмосферы вплоть до высот нижней термосферы порядка 140 км. С помощью такой методики можно определить флуктуации скорости ветра в диапазоне высот от верхней стратосферы до нижней термосферы (90–140 км).

Сейсмические волны в земле. Аналогичным образом распространяются сейсмические волны в земле. Они могут быть как естественного происхождения, так и искусственные. В качестве естественных источников сейсмических волн мы можем назвать землетрясения, извержения вулканов, горные обвалы. Искусственным образом сейсмические волны возбуждаются наиболее эффективно взрывом или специальными многотонными вибраторами. Если в океане и атмосфере распространяются только продольные звуковые волны (в жидкостях и газах отсутствует сдвиговая упругость), то сейсмические волны могут быть как продольные, так и поперечные. Поперечные волны, в зависимости от плоскости колебаний, могут иметь разную поляризацию. Скорость распространения поперечных волн, как правило, в 2–3 раза меньше скорости распространения продольных. Наличие сейсмических волн двух типов расширяет возможности сейсмического зондирования в сравнении с зондированием океана или атмосферы.

Центральной задачей сейсмического зондирования является исследование структуры земли и поиск полезных ископаемых. Обе эти задачи требуют выполнения противоречивых подходов. С одной стороны, интересно заглянуть как можно глубже под поверхность земли. Этого можно достичь, понижая частоту сейсмического излучения. С понижением частоты снижаются потери, связанные с затуханием, и звуковые волны распространяются дальше. С другой стороны, уменьшение частоты ведет к росту длины излучаемой волны, а это снижает разрешающую способность дистанционного метода зондирования. Всё возрастающие требования к качеству разведки полезных ископаемых заставляют искать способы повышения разрешающей способности, а следовательно, и точности сейсморазведки.

Разрешить возникшее противоречие удалось за счет развития методов приема сейсмических сигналов. Известно, что чем больше приемная антенна, тем выше ее пространственное разрешение. Если принимать сигналы большим количеством приемников, объединенных в единую сеть, то можно повысить пространственную точность дистанционного зондирования. Но для этого требуется сложная обработка сигналов от многих сотен или даже тысяч приемников. Современная сейсморазведка обеспечивает достаточную точность зондирования, чтобы определить продуктивные залежи полезных ископаемых, например нефти или газа, на глубинах более 10 км. Современные технологии обеспечивают прохождение скважины горизонтально вдоль пласта, чтобы повысить эффективность добычи нефти. Толщина пласта составляет порядка 10 м на глубине несколько километров. При этом длина скважины может быть более 10 км. Точность прокладки скважины соизмерима с точностью выведения ракеты на траекторию к межпланетному полету.

Для зондирования структур земли используют естественные низкочастотные сейсмические сигналы от землетрясений или даже приливных волн, вызванных движением Луны. На рисунке 4 показан пример результатов такого зондирования на глубину более 50 км. Он свидетельствует о том, что в структуре земли есть не только горизонтальные слои, но и крупные вертикальные разломы, которые могут доходить до мантии.

Знание особенностей распространения

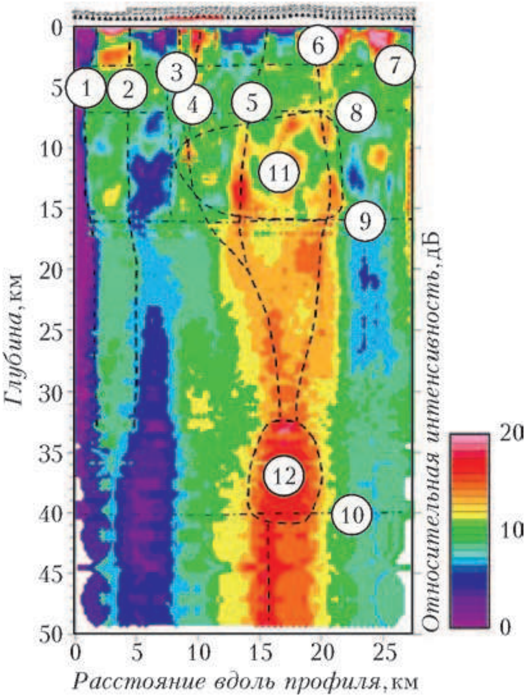


Рис. 4. Вертикальный сейсмический разрез строения верхних слоев земли

низкочастотного звука в океане, атмосфере и земле позволило разработать и создать эффективную международную систему контроля за выполнением договора о всеобщем запрещении ядерных испытаний. Существует специальная схема расположения станций на земле и в океане, осуществляющих постоянный мониторинг и регистрирующих сейсмические, гидроакустические и инфразвуковые сигналы в атмосфере. Эти станции объединены в общую сеть и поэтому могут определить место и время события, приведшего к появлению того или иного сигнала.

Примером такой эффективности является обнаружение взрыва метеороида в небе над Челябинском 15 февраля 2013 года. Метеороид вошел в атмосферу под углом 20° со скоростью 18 км/с. По мере полета в атмосфере скорость метеороида уменьшалась и происходил его нагрев. Перед ним возникла ударная волна, в которой воздух был сильно сжат и разогрет. Метеороид разрушился, когда разность давлений на фронте ударной волны и на противоположной его стороне превысила предел прочности метеороида. Это разрушение (взрыв) сопровождалось вспышкой яркости излучения в течение пяти секунд. Максимум яркости наблюдался на высоте 23,3 км южнее Челябинска. Примерный эффективный диаметр метеороида равен 18 м, а его масса 11000 тонн. Семнадцать станций зарегистрировали ударную волну этого взрыва. Последующий анализ позволил оценить эквивалент мощности взрыва в 2-3 кт тринитротолуола.

Современные проблемы применения медицинского ультразвука

Ультразвук мегагерцового диапазона частот достаточно хорошо распространяется в биологических тканях. Как известно, живые организмы почти на 90% состоят из воды. Поэтому скорость распространения звука в таких условиях близка к 1500 м/с, что соответствует скорости распространения звука в воде. Длина волны ультразвука на частоте 1 МГЦ равна при этом 1,5 мм, что обеспечивает достаточно высокое пространственное разрешение ультразвуковых методов.

Хорошо известно применение ультразвука в медицине для диагностики и исследования внутренних органов и суставов (УЗИ). Менее известны успехи в области ультразвуковой хирургии, хотя и здесь есть существенные результаты. Прежде всего это дробление и удаление камней из почек с помощью фокусированного воздействия ударными волнами – так называемая литотрипсия. Начиная с 1980-х годов литотрипсия является наиболее распространенной процедурой для удаления камней из почек. Другим быстро развивающимся направлением исследований является терапевтическое направление применения ультразвука, основное преимущество которого – лечебное воздействие внутри тела без повреждения окружающей ткани. Широкие возможности различных видов ультразвуковой терапии были продемонстрированы экспериментально, а некоторые из них уже нашли применение в клинической практике. Одним из примеров является интенсивный фокусированный ультразвук.

Рисунок 5 иллюстрирует основную идею применения фокусированного ультразвука. Акустическая интенсивность вблизи излучающего преобразователя достаточно низка, так что ткани не повреждаются. В

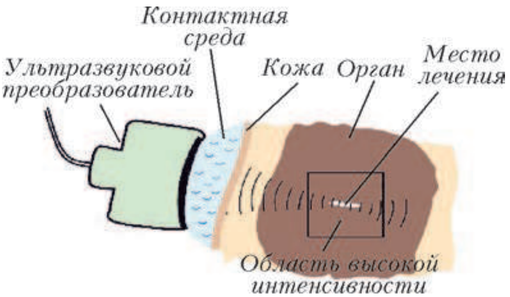


Рис. 5. Схема ультразвукового воздействия на биологические ткани. Пучок интенсивного фокусированного ультразвука используется для локализованного разрушения опухоли или остановки внутреннего кровотечения без повреждения окружающей ткани. Акустическая энергия, излучаемая ультразвуковым преобразователем, концентрируется в объем, примерно равный объему рисового зерна

фокальной области интенсивность заметно возрастает, и нагрев за счет поглощения волны достаточен для теплового разрушения белков ткани. Это позволяет неинвазивно «прижечь» место внутреннего кровотечения или вызвать некроз опухолевых тканей в глубоко расположенных областях человеческого тела. Наиболее перспективными, с точки зрения расширения применения ультразвуковых методов в медицине, являются гемостазис (остановка кровотечения), хирургия и стимуляция иммунного отклика. Можно также упомянуть ультразвуковой контроль и интенсификацию транспорта лекарств. Экспериментально было показано, что ультразвук может улучшать транспорт лекарств и генов через биологические барьеры: клетки, ткани и тромбы.

Укажем на некоторые основные проблемы, которые нуждаются в решении для успешного применения интенсивного ультразвука в практике.

Одной из важных задач является получение больших значений амплитуды акустической волны в фокусе с учетом структуры человеческого тела. Усиление ультразвуковой волны при фокусировке необходимо для обеспечения высокой интенсивности в небольшой фокальной области, чтобы не повредить остальные участки ткани на пути распространения ультразвука. Ультразвуковой ожог кожи является одним из характерных побочных эффектов при применении интенсивного ультразвука, поскольку в коже коэффициент поглощения ультразвука в несколько раз выше, чем в ткани. Поэтому на этом участке акустическая интенсивность должна быть как можно более низкой. Такую процедуру возможно реализовать, применяя многоэлементные ультразвуковые антенны, излучение которых будет согласовано со структурой тела, по которой должно пройти излучение.

Важными также являются технические разработки по созданию хорошего акустического согласования ультразвукового излучателя с телом. Дело в том, что ультразвуковые излучатели делаются, как правило, из пьезоэлектрической керамики. И для того чтобы обеспечить наилучшую передачу звуковой энергии в человеческое тело, нужно согласовать условия прохождения звука от твердой пьезокерамики к мягким биологическим тканям. Для этого применяют специальные контактные смазки или жидкости. Например, по сравнению с вогнутыми источниками плоские УЗ преобразователи гораздо труднее сделать фокусирующими, но зато для них легче

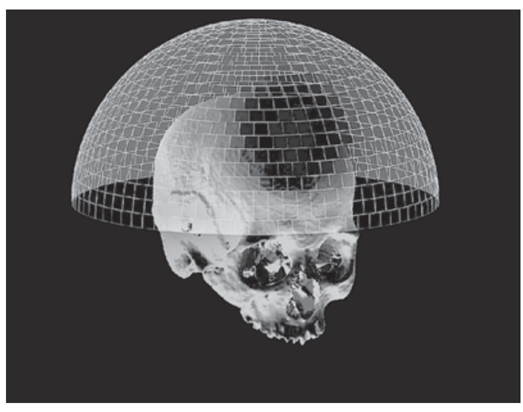


Рис. 6. Схема ультразвукового транскраниального воздействия на мозг

обеспечить согласование при непосредственном контакте с кожей. Поглощение в костях еще сильнее, вот почему важно минимизировать попадание на них ультразвука. Соответствующая технология предполагает использование многоэлементных фазированных антенн для осуществления электронной фокусировки. На рисунке 6 показано схематическое изображение такой антенны для фокусировки ультразвукового излучения в мозг через кости черепа.

Мозг является тем органом, где применение терапии с использованием фокусированного ультразвука имеет свои особенности. Принципиальной трудностью здесь является тот факт, что ультразвуковые волны плохо проходят сквозь черепную коробку из-за поглощения в кости и отражения на ее границах. Кроме того, кости черепа неоднородны по толщине и характеризуются более высокой (по сравнению с расположенными за ними мягкими тканями) скоростью звука, что приводит к трудно предсказуемым эффектам рефракции. Решение проблемы ультразвукового воздействия и визуализации через толстые кости черепа возможно при использовании разработанных в последнее время методов волновой физики, связанных с компенсацией потерь и аберраций при распространении волн в неоднородной среде. В основе лежит голографический принцип, согласно которому распределение характеристик волнового поля на некоторой поверхности в этом поле содержит информацию о всей трехмерной структуре поля, а также принцип обратимости недиссипативных волновых процессов во времени и связанный с этим метод обращения волнового фронта.

Метод обращения волнового фронта, применяемый в радиолокации и при исследовании структуры подводных акустических каналов в океане, предполагает использование пробной волны, которая, проходя по неоднородной среде, регистрируется многоэлементной антенной. Зарегистрированный сигнал имеет сложную пространственную и временну́ю структуру, что отражает многолучевое распространение через неоднородную среду. Если на антенне обратить во времени фазовые задержки зарегистрированного сигнала и излучить сигнал с такой сложной пространственно-временно́й фазовой модуляцией, то излученный сигнал, проходя в обратном порядке через те же самые неоднородности среды, соберется, т.е. сфокусируется в точку излучения пробного сигнала. Для реализации такого подхода необходимо использовать многоэлементные приемо-излучающие антенны, управляемые мощными вычислительными процессорами, обеспечивающими в реальном времени сложную многоканальную обработку сигналов.

Обратим внимание на еще одну особенность, требующую учета при применении интенсивного фокусированного ультразвука, – это акустическая нелинейность. Дело в том, что в уже использующихся в практике системах ультразвуковой хирургии уровни акустической интенсивности в области фокуса достигают 10000–30000 Вт/см^2. При таких интенсивностях волна ведет себя нелинейным образом. Скорость распространения звуковой волны становится зависящей от ее фазы: волна в области сжатия имеет большую скорость распространения, чем в области разрежения. Поэтому в синусоидальной волне фаза сжатия догоняет фазу разрежения – в волне образуются разрывы и волна превращается в пилообразную, что в спектральном представлении соответствует обогащению монохроматического ультразвукового излучения высшими гармониками. Обогащение спектра излученного сигнала сказывается и на процессе дифракции. Дифракция и, соответственно, фокусировка ультразвукового излучения становятся нелинейными, т.е. амплитудно-зависимыми процессами. Расстояние, на котором образуется разрыв в плоской гармонической волне с характерной для медицинских приложений частотой 1,5 МГц, составляет всего 3–5 мм. Этот масштаб соизмерим с размерами фокальной области ультразвукового пучка, поэтому при описании акустических полей таких систем безусловно необходимо учитывать нелинейные эффекты.

Интервью с Р.К.Гординым

Шестнадцатого ноября этого года исполнилось семьдесят лет выдающемуся учителю математики Рафаилу Калмановичу Гордину. Почти вся педагогическая карьера Рафаила Калмановича связана с московской школой №57. В нее он пришел в марте 1974 года и с тех пор занимается обучением талантливых детей в математических классах. Десятки его выпускников стали профессорами математики и работают в ведущих университетах по всему миру: в России, США, Канаде, Великобритании, Франции, Израиле и других странах. Многие его ученики, работающие в других областях науки, образования, в сфере высоких технологий, достигли больших успехов тоже в немалой степени благодаря урокам Рафаила Калмановича.

Звания Рафаила Калмановича можно перечислять долго – он Заслуженный учитель РФ, Соросовский учитель, неоднократный лауреат грантов Москвы в области образования, лауреат гранта Фонда некоммерческих программ «Династия», премии Президента России и премии фонда «Династия» «За выдающиеся заслуги в образовании в сфере естествознания». За последние два десятилетия Рафаил Калманович создал компьютерную базу из более чем 10000 задач по математике, которой пользуется множество учителей и школьников (zadachi.mccme.ru). Кроме того, он написал несколько задачников по математике.

Учительская биография Рафаила Калмановича пришлась на разные и порой противоречивые времена. Неизменными оставались его профессионализм, достоинство и уважительное отношения к детям. Всем подросткам, с которыми он работал (а это были не только будущие математики – ведь он преподавал и в биологических классах, и даже в торгово-экономическом техникуме), Рафаил Калманович прививал большую любовь к математике. А еще для многих из нас, его учеников, Рафаил Калманович стал первым школьным учителем, который обращался к нам на «Вы» и относился, как к взрослым людям, – благодарность за это ощущается даже спустя десятки лет после окончания школы. Вопрос: «А как бы на это отреагировал Рафаил Калманович?» неслучайно возникает в наших головах в различных непростых ситуациях. Ведь мы все учились у него не только математике, но и отношению к жизни.

Ученики Рафаила Калмановича

Разговор происходил в день празднования 50-летия набора первых математических классов в 57 школе.

– Рафаил Калманович, расскажите, пожалуйста, про учебу в школе и университете. Как вы выбирали вуз? Думали ли вы тогда о профессии учителя?

– Я жил в городе Новогрудке в Гродненской области. Школьником я любил читать журнал «Наука и жизнь», его выписывали соседи. В 63-м году я учился в 7 классе, и мне попался выпуск журнала, в котором были помещены условия олимпиады. Тогда – это были времена Хрущева – решено было создать научный центр в Сибири, Сибирское отделение Академии наук, и построить Академгородок. При Новосибирском университете сделали и школу (сегодня это СУНЦ НГУ). Организовали Всесибирскую математическую олимпиаду. Я прочитал задачи по физике (по математике я не сделал ничего). Там было 10 задач, я что-то написал и забыл про это. Вдруг мне приходит письмо: «Вас приглашают на второй тур. Все оплачивается». Мне в этот момент было 13 лет, родители не хотели меня одного отпускать в Сибирь. Но все же отпустили. Я поехал и замечательно провел два месяца. Там были известные ученые: Алексей Андреевич Ляпунов, Михаил Алексеевич Лаврентьев, Андрей Михайлович Будкер, Анатолий Иванович Мальцев. Нас водили по институтам, показывали синхрофазотрон на встречных пучках в Институте ядерной физики. Проводились субботники, мы строили школу, ходили в походы и на экскурсии. А как только я приехал, прошел второй тур олимпиады. После него, конечно, оставили всех, кого пригласили, – не отправлять же сразу назад. И я тоже остался, хотя никаких особых успехов у меня не было. И на третьем туре я что-то решил, но уже по математике, а не по

физике. И получил третью премию – не бог весть что, но самое главное – меня приняли в этот интернат, т.е. готовы были оставить, чтобы я учился в этой школе. Отец всю жизнь вспоминал: «Какую ты глупость сделал, что уехал».

– А ваши родители были готовы к тому, что вы останетесь, будете жить и учиться в школе так далеко?

– Да, родители были готовы, но я сказал «нет» и уехал домой. Потом я перескочил через 8 класс. И во время моей учебы в школе появилась 11-летка. Я не стал учиться в 11 классе, после 10 класса сдал все экзамены – так что учился я 9 лет вместо 11. Потом уже участвовал в разных олимпиадах, но больших успехов у меня не было. Но я стал победителем Белорусской олимпиады, которая проводилась специально для отбора в университет. И меня приняли – но мне еще пришлось сдавать экзамены. Математику я сдал нормально, а по физике мне попался такой билет! Я совершенно не знал, что там говорить – насыщенные пары... Мне нужно было спокойно ставить двойку. Я что-то начал экзаменаторам говорить, они отвечают: «Мы сейчас отведем вас в лабораторию, и вы увидите, что происходит на самом деле». В общем, поскольку я был в списке победителей олимпиады, поставили мне 4.

Первые года два – два с половиной я учился хорошо, получал одни пятерки – кроме истории КПСС, а потом как-то расслабился, увлекся музыкой, битлами. Один спецкурс вел Владимир Геннадьевич Спринджук – был такой математик, к сожалению, он рано умер. Он занимался теоретико-числовыми проблемами, решил проблему Малера, довольно известный человек в своей области. Я у него занимался аналитическими функциями в p-адических полях, написал диплом на эту тему. Он хотел взять меня в аспирантуру.

Потом наступило время распределения. Распределение зависело от среднего балла. У меня был средний балл около 4,5 – не блестящий, но это считалось очень хорошо. Я шел примерно в первых пяти десятках (из 250 человек). На распределении присутствовал ректор, академик Севченко Антон Никифорович, страшный антисемит, он специально приходил, чтобы не дай бог какого-нибудь еврея не взяли куда-нибудь, кроме школы. Могли бы отправить меня в какой-нибудь НИИ, что-нибудь считать – нет, надо было обязательно распределить меня в школу. Но в конечном счете получилось хорошо.

Севченко был занят в это время чем-то другим. И тут привели меня. Я сажусь, он все еще продолжает другой разговор, потом смотрит: «Кто это?» Читает фамилию, имя и отчество и уже не смотрит в мою сторону: «В Министерство просвещения». В Министерстве просвещения я был одним из первых, и мне предложили на выбор несколько хороших, по их мнению, мест (рядом с Минском, сказали, что оттуда можно будет ездить в университет, чтобы заниматься в аспирантуре). Я отказался и попросил отправить меня в родной Новогрудок. Мне сказали: «Да, пожалуйста, никаких проблем», – и я уехал туда. В Новогрудке было два техникума, один из них – торгово-экономический. Я пришел туда и три года отработал там, был классным руководителем. В техникум поступали в основном девочки из деревень, потому что специальность хорошая – либо ты товаровед (у меня была группа «товаровед продовольственных товаров»), либо ты бухгалтер. У меня в группе был только один мальчик – его звали Леня Керногa. Я его научил играть на бас-гитаре, а в математике ничему не научил. Он играл нормально, у нас был ансамбль; сам я в нем не выступал, но учил их – и они играли на танцах. Удивительно, что среди этих детей попадались очень способные.

– А как вы оттуда попали в Москву и начали работать в 57 школе?

– Я еще пытался поступать в аспирантуру (кажется, даже два раза). Из этого, конечно, ничего не вышло, и даже Спринджук мне помочь не смог, хотя он и пытался что-то сделать. В результате я переехал в Москву – потому что женился. Отец моей жены был военнослужащий, он призывался из Москвы и по тогдашнему закону должен был на пенсию вернуться в Москву. Вся семья приехала в Москву, и я тоже. Но нужно было искать работу. Друг моего отца познакомил меня с Александром Семеновичем Кронродом, который в то время занимался компьютерным распознаванием рентгеновских снимков легких. На этой почве Кронрод был знаком с другом моего отца. И этот друг попросил устроить меня на работу – куда-нибудь в вычислительный центр. Хотя я очень плохо программировал. Мне даже в университете поставили зачет за то, что я дал слово никогда не заниматься программированием. Но нужно же мне было где-то работать, я уже был согласен на все. Кронрод взялся меня устраивать, я к нему каждое утро приезжал на работу, он звонил в разные места, договаривался, и я ехал в эти разные места, со мной разговаривали, но никуда не брали. Так повторялось несколько раз и продолжалось уже месяц. В результате я ему как-то сказал: «Я готов на любую работу, даже в школу». «В школу? Ну это, извините, очень тяжело. Я должен принять у вас экзамен. Вы согласны сдавать?» Мы разговаривали вечером по телефону, и он спрашивает: «Сейчас можете приехать?» Где-то в десять часов вечера я поехал к нему сдавать экзамен. С первого раза не сдал: что-то решил, что-то не решил. Он дал мне задачи на дом и сказал: «Решите – звоните». Утром я встал и решил все, кроме одной задачи – доказать, что не существует функции, разрывной во всех иррациональных точках и непрерывной во всех рациональных точках. Я тогда не знал ничего этого. Я ему позвонил и сказал, что могу решить все, но не могу решить эту задачу. Он ответил: «Правильно, так и должно быть». Я приехал к нему и рассказал решения остальных задач. Он сказал: «Хорошо, теперь я вас рекомендую», – и дал мне телефон Николая Николаевича Константинова. Я позвонил, мы встретились с Колей, и он меня повез в 179 школу. Там не было места, не было часов, но как-то он и Кронрод уговорили директора, чтобы меня взяли хоть на какие-то часы. Мне дали несколько часов – математический анализ. Это был ноябрь 1973 года. Я приходил со студентами на уроки анализа [в 179 школе, как и в некоторых других матшколах, на часть уроков приходят недавние выпускники и принимают решения задач у школьников]. Я там был «переростком» – мне было уже 24 года, а они все пятикурсники. Я долго не мог понять, что происходит – ведь человеку со стороны то, что делается на уроках анализа в школах типа 57 и 179, совершенно непонятно. Но постепенно я привык, потом мне стали давать замены – уроки алгебры и геометрии. Я даже получал какие-то деньги, очень небольшие – рублей 30 в месяц.

Так прошло несколько месяцев, и вдруг в феврале 1974 года мне звонит Коля и говорит, что в 57 школе образовалась вакансия, повисло 17 часов. Коля меня привел туда, со мной поговорили директор школы Нина Евгеньевна Лапушкина и завуч Лев Нилович Бухман. Мне все равно устроили экзамен. Пригласили на него Елену Георгиевну Глаголеву. Она математик, работала у И.М. Гельфанда и при этом занималась преподаванием – в том числе и теорией преподавания. Я поговорил с ней, и она осталась довольна. Меня взяли, я был счастлив: у меня есть работа! Ученики были замечательные – особенно 7 класс. Там учились Марк Спиваковский, Роман Смоленский, Михаил Бершадский – они потом стали выдающимися математиками, сейчас в коридоре школы висят плакаты с их биографиями. Еще мне дали 8 класс и 9 биологический, тоже замечательный. Дети из всех трех классов были такие прекрасные, так хорошо ко мне относились и хорошо себя вели – а в 179 школе у меня все было ужасно с дисциплиной, я ходил туда, как на каторгу. Но уйти оттуда я не мог, приходилось работать и там, и там. Школы рядом, поэтому мне ставили уроки в один день в разных школах, и я за перемену успевал перейти из одной школы в другую. Так продолжалось пару месяцев.

Наступил конец учебного года, мне никто не предлагает ничего. Я спросил у Льва Ниловича, что будет на следующий год. Он ответил: «Никаких вопросов, конечно, оставайтесь здесь. Мы вам дадим и классное руководство». Я счастлив и доволен и думаю, как мне уйти теперь из 179 школы (тяжело работать и там, и там). И тут меня вызывает к себе директор 179 школы и говорит: «Мы подумали, поспрашивали о вас – и родителей, и детей. Мнения разные. Одни говорят, что вы не поддерживаете дисциплину, очень тяжело на уроках – шумно. А некоторые говорят, что даете хорошие задачи. Мы решили рискнуть и предложить вам часы и классное руководство». Я ей говорю: «Спасибо, но мне уже не нужно». Как она разозлилась – боже мой! Она мне сказала: «Если б вы знали, сколько мне пришлось пережить, чтобы вас сюда пристроить!» Действительно – я могу себе представить, что это было. Меня брали на маленькую нагрузку, и Кронрод ходил, уговаривал ее, и Коля уговаривал. А я взял и наплевал на это. Но у меня действительно в этот момент уже была работа в 57 школе – и все равно с ее точки зрения я был неблагодарным. Потом она это мне припомнила. У меня не было квартиры, и я пытался найти где-то квартиру, вступить в какой-то кооператив. Она мне сказала: «Если бы вы остались, то я бы вам устроила квартиру!» Но мне все-таки пришлось те два класса, которые у меня были (9 и 10), довести до конца. Так что в 179 школе я проработал еще год. Потом в 179 школе все наладилось. Там были мои замечательные ученики и друзья братья Дацковские – мы с ними подружились. Один сейчас математик, он профессор в университете Филадельфии, второй физик. Когда я был в Америке в 1990 году, я с ними встречался. С этим классом на самом деле все было хорошо, там были хорошие дети.

В результате с 6 марта 1974 года я работаю в 57 школе. Мне здесь страшно понравилось. Мгновенно, сразу, как только я сюда пришел.

– Расскажите, пожалуйста, про особенности 57 школы.

– Я пришел на все готовое, и сам долгое время не понимал, как устроено преподавание в этих школах – в 57, в 179, в 91, куда меня тоже Николай Николаевич водил. Он меня водил на кружок. Тогда маткружки были на Моховой улице, в старом здании МГУ. Я не понимал, как начальство ко всему этому относится. Как это – столько народу приходит на уроки (сразу много человек принимает задачи в одном классе). Все это было для меня очень странно, но я постепенно к этому привык. Мне в 57 школе достались очень хорошие классы: 7 и 8 математические и 9 биологический. С ними никогда не было проблем, они очень хотели учиться. Мне при этом очень хотелось им что-то рассказать – а я многого не знал, я три года, можно сказать, ничего не делал. Пришлось и ночами сидеть, решать задачи, привыкать ко всему этому. Первое время было довольно тяжело, пока я в это вошел. Слава богу, была замечательная дисциплина – это очень много значит, когда тебя слушают, тебе помогают. Можно было ошибиться – тебя поправят, причем все это было очень доброжелательно. Я и до сих пор ошибаюсь. Подсказывают. Я считаю, что мне жутко повезло. Ведь я мог и не попасть сюда. Уже теща нашла мне работу в вечерней школе – на 24 часа, 4 раза в неделю. Я уже был готов туда пойти – если бы не Кронрод, не его экзамен и не Константинов. Вечерняя школа – это было бы хуже.

А если бы не было никаких знакомых – как бы я узнал о том, что есть такие школы?

– В первую очередь нам – вашим ученикам – повезло.

– Не знаю, как вам – мне точно повезло!

– Как вы ведете уроки – по какой программе, по каким учебникам? Расскажите немного о системе листочков.

– Я скорее придерживаюсь программы для математических классов, а по учебнику почти ничего не задаю. Мне нравится самому составлять листочки, я их даю ученикам и называю номера задач из этого листочка, которые нужно решить. Иногда прошу прочитать что-то из учебника. Но это бывает редко даже в геометрии, а в алгебре еще реже. Когда мы готовимся к экзамену в 9 классе, то по крайней мере сначала придерживаемся учебника. Например, по геометрии используется учебник Погорелова – из него берется аксиоматика. Нужно ведь договориться об основах. А задачи я даю из листочков. Конечно, мои уроки отличаются от уроков анализа, на которых много преподавателей одновременно принимают задачи. Но я ходил, смотрел, кто что делает, вызывал к доске – в общем, как-то приспосабливался.

Главный принцип листочков – от простого к сложному. Конечно, я старался подбирать красивые задачи, которые решаются с удовольствием. Я хотел, чтобы задачи было интересно решать. Бывают ведь такие задачи, что даже условие до конца читать не хочется. Я старался, чтобы таких не было. Хотя сказать, что у меня совсем не было громоздких задач, нельзя – громоздкие задачи тоже нужно уметь решать. Но все-таки их было не так много.

– Кто из коллег оказал на вас влияние?

Во-первых, конечно, Кронрод. Он заставлял меня решать задачи по анализу. Он потом захотел, чтобы я к нему поступал в аспирантуру. Но сам он не мог формально быть мои научным руководителем: он работал в научно-исследовательском институте, занимался нефтью (компьютерные расчеты для взрыва и распространения волны). Тем не менее, он меня прикрепил к аспирантуре. Сначала это был Всесоюзный заочный педагогический институт. Там я прошел курсы английского языка и философии, сдал кандидатский минимум. Потом он же прикрепил меня к аспирантуре Педагогического института. Я там был сначала у заведующего кафедрой Щеголькова, после мне дали другого научного руководителя – Дмитрия Абрамовича Райкова, это очень известный профессор педагогического института. Потом он неожиданно умер, и меня перебросили к Мееру Феликсовичу Бокштейну – крупному специалисту по алгебраической топологии. Но в какой-то момент математика в моей планировавшейся диссертации все же перешла в методику. Я что-то написал, но это было неудачно – читавшие не могли понять, где там психология. И в результате я бросил аспирантуру (хотя кандидатские минимумы я все сдал). Но зато я научился печатать на пишущей машинке.

– Это была вторая половина 70-х годов?

– Да, где-то 75-й, 76-й годы. У меня свалилась гора с плеч – не нужна мне никакая диссертация! И я стал заниматься только школой. И к вопросу о том, кто оказал на меня влияние: я познакомился (не помню, как) с Игорем Федоровичем Шарыгиным – он на меня сильно повлиял. И еще Арнольд Яковлевич Блох. То есть три человека – Кронрод, Шарыгин и Блох. Никого из них, увы, уже нет. А также очень многому меня научил Борис Петрович Гейдман.

– Бывало ли когда-то так, что вы учились чему-то у своих учеников?

– Так все время происходит! Обязательно кто-нибудь что-то скажет интересное. Игорь Пухов (он погиб, очень жалко его), он дважды получал медали на международных олимпиадах, – он так решал задачи! Он смотрел-смотрел, а потом тихим голосом выдавал решения – причем всегда такие красивые! Конечно, очень многому я научился у детей. И сейчас иногда школьники придумывают какое-то решение – я его сразу записываю и запоминаю. Сегодня на открытом уроке я рассказывал оригинальные (по крайней мере, с моей точки зрения – я до этого их никогда не видел) решения задач, которые придумали наши ученики – либо во время уроков, либо во время решения домашних заданий.

– Расскажите, пожалуйста, про базу задач по геометрии (zadachi.mccme.ru).

– В 1991 году ко мне пришел выпускник 81-го года Миша Бузиниер и сказал, что они с товарищами хотят написать программу, с помощью которой можно было бы искать задачи по разным критериям. Миша сказал, что у них было несколько семинаров, что Леша Канель написал книжечку, в которой изложил теоретические основы того, как должна быть устроена подобная система: что нужно знать про задачу, чтобы ее найти, что самое интересное, как это все с его точки зрения должно быть устроено. Они такую программу написали, но ее нужно заполнить задачами, и они обратились ко мне – чтобы было хотя бы 100 задач.

– Только по геометрии?

– Да. Они хотели проверить, работает ли система, интересно это или нет. Я заинтересовался и с удовольствием этим занимался. Сделал, проверили – да, действительно как-то хорошо (но медленно) это работало. Медленно, потому что, в частности, это был редактор ChiWriter (теперь он не используется). Программа загружалась чуть ли не 5 минут, но работала и находила задачи по атрибутам, которые я расставлял. Потом сделали еще 600 задач. На это ушел год, наверное. Все работает. Проблема была в том, чтобы рисовать картинки. Сам код программы при этом писали Миша Бузиниер и Сережа Трифонов, еще в этом участвовали Дима Тейблюм и многие другие. А наполнением базы задачами сначала занимался только я. Потом, когда все это стало развиваться (и было около 1000 задач), стал участвовать Володя Протасов, ученик Шарыгина – теперь он профессор в Независимом московском университете. Шарыгин тоже загорелся – он сам не участвовал, но очень хорошо относился к идее базы задач. Эту программу даже пытались продавать, были какие-то выставки и лекции, об этой базе писали книжки. Так продолжалось несколько лет. Потом все как-то вдруг заглохло. Затем появился редактор TeX, стал развиваться интернет, и у кого-то возникла идея – почему бы не перевести базу в TeX. Дима Школьник написал программу, которая документ из ChiWriter'а переводит в TeX. У этой программы были, конечно, жуткие погрешности, так что потом приходилось править вручную. Потом появился Миша Раскин, который вообще сделал все это идеально. Стало уже 3000 задач, 5000 задач. Сегодня у нас больше 10000 задач, и база работает идеально. Я там мгновенно нахожу все, что мне нужно. Я знаю, что очень много людей этой базой пользуется: в среднем в сутки у нас примерно 500 обращений (уникальных пользователей, конечно, меньше, но 500 раз в день та или иная задача из базы запрашивается). Для неразвлекательной программы это, кажется, нормально. Конечно, нам присылают отзывы, находят ошибки, опечатки. Мы мгновенно реагируем, исправляем. Теперь этим занимается Миша Панов – рисует картинки, когда у него есть время. Забиваю в базу задачи по-прежнему только я. Самая большая проблема – это картинки, сейчас они есть только примерно у 20% задач. Но добавлять картинки тяжело – нужно, чтобы 10-20 человек сидели месяц и все это писали. Когда у нас была практика в школе, Миша вел кружок по MetaPost'у, учил детей рисовать – и дети сделали рисунки, по 40-50 задач каждый. Конечно, Миша и сейчас ведет кружок, но туда ходит всего несколько человек. Иногда я выбираю задачи из системы, а он к ним рисует картинки. Получается, что рисунки прибавляются, но я ввожу новые задачи с большей скоростью, чем рисуются задачи к старым. К сожалению, такой разрыв есть. Мне эта система нравится. Я бы с ней с удовольствием работал: она идеально подходит для того, чтобы подобрать задачи к кружку, к уроку, к контрольной работе.

– Значит, основной смысл базы в том, что она позволяет искать задачи по теме?

– По теме, по сложности, по разным атрибутам (например, задача на доказательство, на построение, на вычисление, на геометрическое место точек, на геометрические неравенства, на максимумы и минимумы, красивая задача, «пожалуй, красивая», олимпиадная, учебная, громоздкая...). Конечно, выписывается граф решения – какие факты, объекты и методы используются; как задачи связаны друг с другом – предки, потомки, аналоги; все это мгновенно отыскивается. Есть возможность распечатать только условие, или условие с решением, или только решение, или условие с ответом (все это можно делать с картинками или без них). Вывод можно получить в TeX'е или в pdf'е. Можно распечатать готовый листок с набором задач.

Кроме того, Миша Панов ввел туда все мои учебные листки – и по алгебре, и по геометрии (отдельно по планиметрии, отдельно по стереометрии). У него там масса чертежей, книги, на которые я ссылаюсь, – в них можно войти прямо из этой системы. Так что у этой системы очень много разных возможностей! Еще много всего для этой системы сделал Вадик Радионов.

– Вы преподаете в 57 школе больше 40 лет. Можете ли вы сравнить учеников того времени и нынешних – что у них общее, в чем разница?

– Принципиальной разницы нет. Это абсолютно те же самые дети. Ну, конечно, раньше была более или менее монополия – было несколько школ, у нас были большие конкурсы, до 15 человек на место, а в последние годы – 4-5 человек на место. По-моему, конкурс понижается в связи с тем, что стало много специализированных школ. Концентрация очень сильных людей в классе сейчас меньше, но все равно они есть. Так что принципиальной разницы я не вижу – разве что концентрация поменялась.

– Ваши ученики побеждали на олимпиадах, есть крупные ученые, бизнесмены, кто-то вернулся работать в школу. Что вы считаете самым большим своим успехом?

– Трудно сказать. Не то, что вы сказали. Не большие математики – они, конечно, есть, но это совершенно не моя заслуга, это понятно. Если и есть какая-то моя заслуга, то это не те, кто стали выдающимися профессиональными математиками, а те, кто выбрали другую профессию, но математика им помогла достичь чего-то. Это важнее. Возьмем, например, Сашу Кузнецова, сейчас он член-корреспондент Российской академии наук. Какое я мог на него оказать влияние?

– Показали красоту математики.

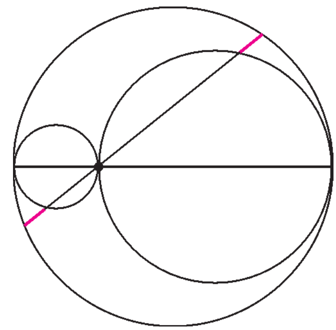
– Он и без меня все это видел и знал.

– Вы можете что-то пожелать школьникам, которые читают это интервью? Есть ли у вас какое-то пожелание для тех, кто интересуется математикой, физикой?

– Если они читают «Квант», то мои пожелания ничего не значат – они уже на правильном пути. А если не читают – то они не прочитают это интервью.

– У вас есть задача для читателей?

– Вот красивая задача – она, правда, известная, но и условие, и решение у нее



красивые. В окружности проведен диаметр, внутри еще две окружности – каждая из трех окружностей касается двух других. Через точку касания проведена хорда (см. рисунок). Докажите, что отмеченные красным кусочки равны.

– Чем вы занимаетесь в свободное время?

– Если есть свободные время и силы – сажусь за компьютер, начинаю вводить задачи в систему. Получается, что база задач – это мое хобби. Три или четыре часа я могу вводить задачи, потом просто читаю новости в интернете.

– Можно, наверное, сказать, что база задач доставляет вам удовольствие?

– Конечно! Особенно если какая-то красивая задача… А их необозримое количество – хватит работы на 100 лет 100 людям. Удивительная вещь: казалось бы, число идей конечное, число конфигураций конечное. Но каждый год появляются совершенно роскошные оригинальные задачи. Это просто неисчерпаемый источник!

Интервью взял В.Кондратьев,
фото предоставил В.Алексеев

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2538, М2539 предлагались на XL Турнире городов. Задача М2541 предлагалась на заочном туре XIV олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2538–М2541, Ф2545–Ф2548

М2538. Петя расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася расставляет 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?

Е.Бакаев

М2539. а) Докажите, что любое число вида $3k-2$, где k – целое, может быть представлено в виде суммы одного квадрата и двух кубов целых чисел.
б) Докажите, что любое целое число может быть представлено в виде суммы одного квадрата и трех кубов целых чисел.

Н.Седракян

М2540. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a, BH_b, CH_c.

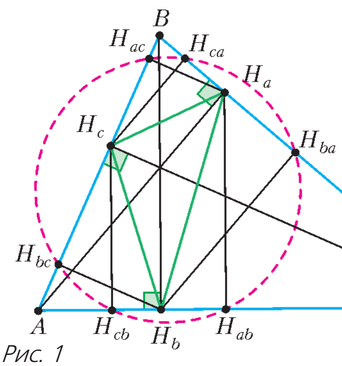


Рис. 1

Пусть H_{ab} – проекция точки H_a на прямую AC (рис.1). Аналогично определим точки H_{ac}, H_{ba}, H_{bc}, H_{ca}, H_{cb}. Докажите, что шесть точек H_{ab}, H_{ac}, H_{ba}, H_{bc}, H_{ca}, H_{cb} лежат на одной окружности, центр которой совпадает с центром масс треугольного контура $H_aH_bH_c$, сделанного из однородной проволоки.

И.Вайнштейн

М2541*. Плоскость разбита на выпуклые семиугольники единичного диаметра. Докажите, что любой круг радиуса 200 пересекает не менее миллиарда из этих семиугольников. (Диаметр многоугольника – это максимум среди расстояний между парами его вершин.)

А.Канель-Белов

Ф2545. Два сплошных шарика разных размеров из одного химически чистого вещества находятся в космосе вдали от других массивных тел и взаимодействуют друг с другом только гравитационным способом. Они вращаются вокруг общего центра масс, делая один оборот за время одного урока $T = 45$ мин. Какой может быть минимальная плотность материала, из которого сделаны шарики? Какому металлу такая плотность соответствует?

А.Буров, Е.Шалимова

Ф2546. Имеется «четверть бесконечная» решетка с квадратными ячейками, состоящая из одинаковых резисторов сопротивлением r, как показано на рисунке 2.

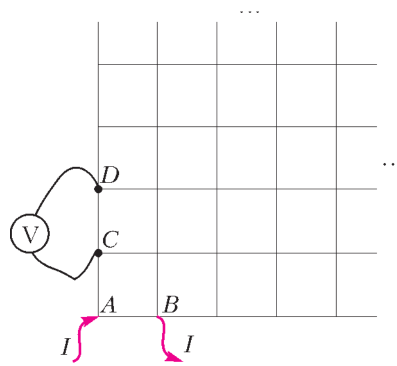


Рис. 2

Известно, что если в узел A втекает, а из узла B вытекает ток I, то идеальный вольтметр, подключенный к узлам C и D, показывает напряжение U. Определите по этим данным сопротивление R_{AB} данной решетки.

А.Бычков

Ф2547. Профессор Электра Шар проводит эксперименты с проводящими шариками. В ходе каждого эксперимента она медленно сближает три уединенных шарика радиусом R каждый так, что в конечном состоянии центры этих шариков находятся в вершинах правильного треугольника со стороной $3R$, и записывает в лабораторный журнал значение работы, которая была ею совершена. При этом шарики в начальном состоянии могут быть как заряженными, так и незаряженными. В случаях, показанных на рисунках 3 *а*, *б*, она

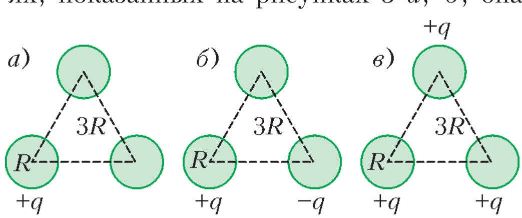


Рис. 3

записала значения работ A_1 и A_2 соответственно. Найдите: 1) потенциал заряженного шарика в случае *а*; 2) потенциалы всех шариков в случае *б*; 3) значение работы в случае *в*.

А.Бычков

Ф2548. В простейшем «театральном» бинокле расстояние между окуляром и объективом равно 10 см, и оно не регулируется. Бинокль обеспечивает увеличение ×2 при рассматривании далеких предметов. Каковы оптические силы (или фокусные расстояния) объектива и окуляра?

Д.Александров

Решения задач М2526–М2529, Ф2533–Ф2536

М2526. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y^2+1,\\ y+\dfrac{1}{y}=z^2+1,\\ z+\dfrac{1}{z}=x^2+1. \end{cases}$$

Ответ: $(x;y;z)=(1;1;1)$.

Преобразуем первое уравнение: $x^2+1=x\left(y^2+1\right)$. Поскольку $x^2+1>0$ и $y^2+1>0$, имеем $x>0$. Аналогично, $y>0$ и $z>0$.

Перемножив $x^2+1=x\left(y^2+1\right)$ с аналогичными уравнениями $y^2+1=y\left(z^2+1\right)$, $z^2+1=z\left(x^2+1\right)$ и сократив на $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)$, получаем, что $xyz=1$.

Далее воспользуемся известным неравенством: при $t>0$ выполнено $t+\dfrac{1}{t}\geq 2$. Тогда $x+\dfrac{1}{x}=y^2+1\geq 2$. Поэтому $y^2\geq 1$, и поскольку $y>0$, то получаем $y\geq 1$. Аналогично, $x\geq 1$ и $z\geq 1$. Сравнивая с условием $xyz=1$, получаем, что единственный возможный случай: $x=y=z=1$.

С другой стороны, тройка $x=y=z=1$ удовлетворяет условию задачи.

Н.Агаханов

М2527. *Дана числовая последовательность $a_1=1^2$, $a_2=-2^2$, $a_3=-3^2$, $a_4=4^2$, $a_5=5^2$, $a_6=6^2$, $a_7=-7^2$, $a_8=-8^2$, … Она получается из последовательности точных квадратов $1^2, 2^2, 3^2$, … расстановкой знаков: одно число со знаком «+», затем два числа со знаком «−», затем*

1^2 2^2 3^2 4^2	5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 10^2 11^2 12^2	13^2 14^2 15^2 16^2 17^2 18^2 19^2 20^2 21^2 22^2 23^2 24^2	25^2 26^2

три числа со знаком «+», четыре числа со знаком «–» и т.д. Обозначим $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите, что среди чисел $A_1, A_2, \ldots$ встретится бесконечно много точных квадратов.

Разобьем последовательность на группы (множества) из 4, 8, 12, …, $4m$, … чисел (на рисунке числа со знаком «+» помечаем красным, а со знаком «–» – синим). В m-й группе первые m чисел со знаком «+», затем $2m$ чисел со знаком «–» и последние n чисел со знаком «+». Докажем, что сумма $A_{2m(m+1)}$ чисел в m первых группах равна точному квадрату.

Посчитаем сумму S_m чисел в m-й группе. Пусть последнее число $(m-1)$-й группы t. Тогда

$$S_m = \left((t+1)^2 + \ldots + (t+m)^2\right) - \left((t+m+1)^2 + \ldots + (t+2m)^2\right) - \left((t+2m+1)^2 + \ldots + (t+3m)^2\right) + \left((t+3m+1)^2 + \ldots + (t+4m)^2\right).$$

Сгруппируем слагаемые и воспользуемся равенством

$$(x+i)^2 - (x+m+i)^2 - (x+2m+i)^2 + (x+3m+i)^2 = m(2x+2i+m) + m(2x+2i+5m) = 4m^2.$$

Получим

$$S_m = \left((t+1)^2 - (t+m+1)^2 - (t+2m+1)^2 + (t+3m+1)^2\right) + \ldots + \left((t+m)^2 - (t+2m)^2 - (t+3m)^2 + (t+4m)^2\right) = m \cdot 4m^2 = 4m^3.$$

Тогда, пользуясь известной формулой для суммы кубов первых m натуральных чисел, имеем

$$A_{2m(m+1)} = S_1 + S_2 + \ldots + S_m = 4\left(1^3 + 2^3 + \ldots + m^3\right) = m^2(m+1)^2.$$

Тем самым, среди чисел $A_1, A_2, \ldots$ мы обнаружили бесконечно много точных квадратов.

Также можно показать, что $A_{2m(m+1)+2m+1}$ равно $(m+1)^4$. Таким образом, среди частичных сумм последовательности $a_1, a_2, \ldots$ встретятся все четвертые степени натуральных чисел.

В.Расторгуев

М2528. *На плоскости отмечено $n \ge 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая пара отмеченных точек соединена отрезком. Каждый из проведенных отрезков красится в какой-то цвет.*

а) Известно, что количество цветов не меньше n.

б) Известно, что в каждый цвет покрашено не более $n-2$ отрезков.

Докажите (в каждом из случаев а), б)), что найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, все три стороны которого имеют разные цвета.

а) Докажем утверждение индукцией по n. База $n = 3$ очевидна. Пусть утверждение верно для $n = k$, тогда докажем его для $n = k + 1$. Среди данных $k + 1$ вершин на время уберем одну вершину A. Если среди отрезков, соединяющих оставшиеся k точек, встречается не менее k разных цветов, то применяем предположение индукции. Иначе цветов не более $k - 1$, значит, есть еще два цвета, назовем эти цвета красным и синим, в которые могут быть окрашены только отрезки, выходящие из вершины A. Рассмотрим красный отрезок AB и синий отрезок AC. Мы знаем, что отрезок BC не является ни красным, ни синим, поэтому треугольник ABC – искомый. Утверждение доказано.

б) Докажем утверждение от противного. Пусть не нашлось ни одного разноцветного треугольника. Оставим отрезки одного из цветов. По условию этих отрезков не более $n-2$, значит, получился несвязный граф (здесь мы воспользовались известным фактом о том, что в связном графе с n вершинами не менее $n-1$ ребер). Выберем *компоненту связности*, в которой больше всего вершин. Так поступим для каждого цвета и рассмотрим компоненту K

того цвета, скажем красного, в которой больше всего вершин. Возьмем вершину A, не принадлежащую K. Пусть B – некоторая вершина компоненты K. Ребро AB не красное (иначе A тоже принадлежала бы компоненте K), пусть, например, ребро AB синее. Возьмем любую вершину C компоненты K, тогда можем пройти по красным ребрам от B до C, пусть этот путь $B_0B_1\ldots B_t$, где $B_0 = B$, $B_t = C$. Рассмотрим треугольник AB_0B_1. Отрезок AB_0 синий, отрезок B_0B_1 красный, отрезок AB_1 не красный (опять-таки, иначе A принадлежала бы компоненте K), значит, отрезок AB_1 синий. Аналогично рассматривая по очереди треугольники AB_0B_1, AB_1B_2, …, $AB_{t-1}B_t$, получаем, что все отрезки AB_i синие, в частности AC синий. Таким образом, любой отрезок из вершины A в вершину из компоненты K – синий. Но тогда все вершины из K и вершина A принадлежат одной компоненте относительно синего цвета. Это противоречит условию максимальности при выборе компоненты K. Задача решена.

Отметим, что заменить в пункте а) число n на $n-1$ нельзя, после такой замены утверждение станет неверным. Также нельзя усилить утверждение пункта б), заменив $n-2$ на $n-1$.

П.Кожевников

М2529. *Дан описанный четырехугольник ABCD. На стороне BC выбраны точки M и N так, что N лежит между B и M (рис.1). Отрезки AM и DN пересекающиеся в точке P. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности с центрами S_1, S_2, S_3 и S_4 соответственно. Докажите, что точки S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на одной окружности.*

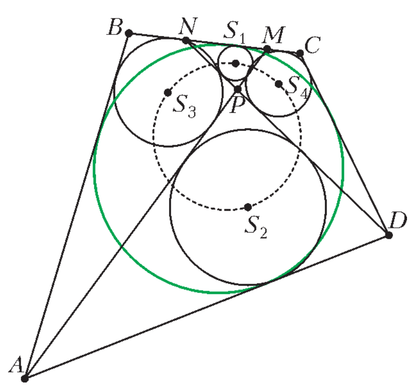


Рис. 1

Проведем общую касательную m к окружностям с центрами S_3 и S_4 (рис.2) и

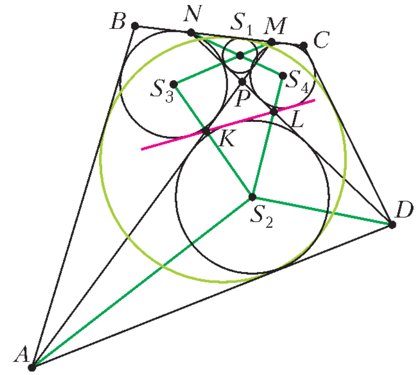


Рис. 2

докажем утверждение: *m отрезает от треугольника APD описанный четырехугольник* (т.е. m касается окружности с центром S_2). Отсюда сразу последует решение. Действительно, тогда прямые S_2S_3 и S_2S_4 – внешние биссектрисы углов K и L треугольника PKL, откуда

$$\angle S_3S_2S_4 = \angle KS_2L = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle APD;$$

а прямые S_1S_3 и S_1S_4 – биссектрисы углов M и N треугольника PMN, откуда

$$\angle S_3S_1S_4 = \angle MS_1N = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle APD.$$

Получаем $\angle S_3S_2S_4 + \angle S_3S_1S_4 = 180^\circ$, а значит, четырехугольник $S_1S_2S_3S_4$ – вписанный.

Обозначив точки касания, как на рисунке 3, получаем

$$AK - KL + LD = (AK + KR_3) - (KT_3 + KL + LT_4) + (DL + LR_4) =$$
$$= AR_3 - T_3T_4 + DR_4 = AP_3 - Q_3Q_4 + DP_4 =$$
$$= (AP_3 + BP_3) - (BQ_3 + Q_3Q_4 + CQ_4) + (DP_4 + CP_4) = AB - BC + CD.$$

Так как четырехугольник $ABCD$ – описанный, имеем $AB - BC + CD = AD$, значит, $AK - KL + LD = AD$, или $AK + LD = KL + AD$, т.е. четырехугольник

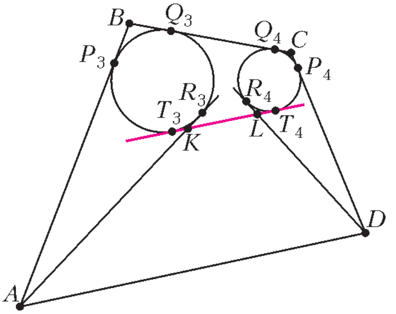


Рис. 3

$AKLD$ – описанный, что и требовалось. (Из рассуждений выше следует, что расположение точек соответствует рисунку: K и L лежат на отрезках AP и DP, а не на их продолжениях.)

Задача решена.

Еще одно решение автора задачи использует изогональное сопряжение в четырехугольнике, о котором мы планируем рассказать позже в отдельной статье.

В завершение дадим еще одно оригинальное решение, которое автор задачи придумал для частного случая совпадения точек M и N (и S_1). (Оказалось, что этот частный случай был независимо придуман и предлагался на Болгарской математической олимпиаде 2018 года, авторы – M.Etesami Fard, N.Beluhov.)

Проведем окружность ω через точки M, S_2, S_3 (рис.4). Пусть она пересечет отрез-

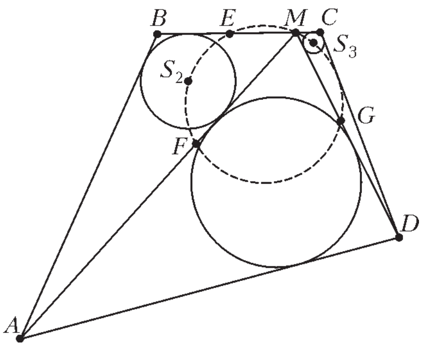


Рис. 4

ки BC, AM и DM вторично в точках E, F и G соответственно. Нам нужно доказать, что ω проходит также через S_4. Воспользуемся результатами из статьи А.Полянского «Воробьями по пушкам» («Квант» №2 за 2012 г.). По «второй лемме о воробьях» $BE + AF = AB$, $DG + EC = CD$, значит, $AF + DG = AB - BE + CD - EC = AB + CD - BC$. Так как четырехугольник $ABCD$ описанный, имеем $DG + AF = AD$, а это по той же лемме означает, что ω проходит через центр вписанной окружности треугольника AMD. Это и требовалось.

П.Кожевников, А.Уткин

Ф2533. *Гантелька состоит из невесомого стержня, который соединяет две маленькие (точечные) бусинки A и B с массами m_1 и m_2 (рис.1). Бусинка A*

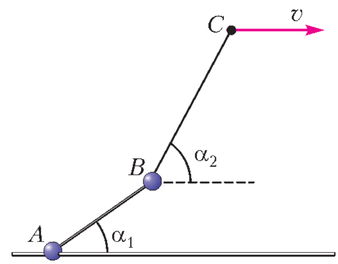


Рис. 1

насажена на длинную горизонтальную спицу. Точка B соединена с точкой C прочной невесомой нитью. Точка C перемещается в одной со спицей вертикальной плоскости параллельно спице с постоянной скоростью. Конфигурация механической системы со временем не меняется. Известны углы α_1 и α_2, которые образуют отрезки AB и BC со спицей. Каков коэффициент трения между спицей и бусинкой A?

Пусть $\vec{T}$ – натяжение нити, $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, действующие на каждую из концевых точек гантельки, $\vec{N}$ – нормальная реакция в точке опоры, $\vec{F}$ – сила трения. Запишем условия относительного равновесия, т.е. равновесия относительно системы отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно вместе с точкой C (рис.2). Равенство нулю суммы сил, действующих на гантельку, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси, будет иметь вид

$$T\cos\alpha_2 - F = 0\,,$$

$$T\sin\alpha_2 + N - (m_1 + m_2)g = 0\,.$$

Из равенства нулю суммы моментов сил, посчитанных относительно точки B,

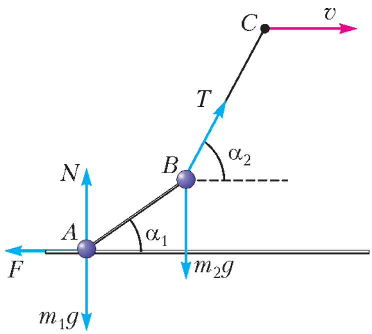


Рис. 2

имеем

$$\left(m_1 g - N\right) l \cos\alpha_1 - F l \sin\alpha_1 = 0 .$$

Решая эти уравнения, находим

$$T = m_2 g \frac{\cos\alpha_1}{\sin\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} ,$$

$$N = \left(m_1 - m_2 \frac{\cos\alpha_2 \sin\alpha_1}{\sin\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}\right) g ,$$

$$F = m_2 g \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} .$$

Поскольку $F = \mu N$, из последних двух выражений имеем

$$m_2 \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} = \mu \left(m_1 - m_2 \frac{\cos\alpha_2 \sin\alpha_1}{\sin\left(\alpha_2 - \alpha_2\right)}\right),$$

откуда

$$\mu = \left|\frac{m_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{m_1 \sin\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) - m_2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_1}\right| .$$

Видно, что в случае обращения в ноль знаменателя коэффициент трения становится бесконечно большим.

А.Буров

Ф2534. *Маленький массивный шарик прикреплен к одному концу упругой нити, а другой конец нити закреплен на потолке. Длина нерастянутой нити L = 1 м. Шарик «запустили» так, что он движется по окружности, оставаясь все время на одном и том же расстоянии от потолка. При этом нить образует с вертикалью угол $\alpha = 60°$ и на один оборот требуется время t = 1,554 с. Каков период малых вертикальных колебаний шарика на той же нити вблизи положения равновесия, если нить все время остается вертикальной? Какова максимальная амплитуда таких колебаний?*

В условии сказано, что шарик движется по окружности, значит трения о воздух нет. Период обращения шарика вокруг центра этой окружности, т.е. время одного оборота t, определяется расстоянием h от шарика до потолка и ускорением свободного падения g. Действительно:

$$m\omega^2 R = m\omega^2 h \operatorname{tg}\alpha = mg \operatorname{tg}\alpha ,$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} .$$

Отсюда находится расстояние до потолка: $h = gt^2 / \left(4\pi^2\right) = 0{,}6$ м и длина растянутой нити: $L' = h/\cos\alpha = 1{,}2$ м, которая больше L на $L/5$. Сила натяжения нити $F = mg/\cos\alpha = 2mg$ в два раза больше силы тяжести mg. Следовательно, отношение жесткости нити к массе шарика равно $k/m = 10g/L$. При малых вертикальных колебаниях период равен

$$T_{\text{верт}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{10g}} \approx 0{,}634 \text{ с} .$$

Максимальная амплитуда A колебаний шарика, при которых нить остается вертикальной, т.е. выпрямленной (или в верхнем положении шарика даже чуть-чуть натянутой), определяется соотношением $Ak = mg$, следовательно,

$$A = \frac{mg}{k} = \frac{L}{10} = 0{,}1 \text{ м} = 10 \text{ см} .$$

А.Шариков

Ф2535. *На стеклянном баллоне лампочки накаливания написано 12 В, 96 Вт. Нить накала сделана из вольфрамовой проволочки с поперечным сечением в форме квадрата $a \times a$, свернута в спираль с шагом чуть больше ребра квадрата. Диаметр спирали $D_{\text{спир}}$ = 1 мм. Лампочка питается правильным эффективным напряжением 12 В от трансформатора, подключенного к сети 220 В, 50 Гц. Средняя температура нити накала T_0 = = 3000 К. Найдите длину спирали и ребро квадрата, а также оцените амплитуду колебаний температуры нити накаливания. Необходимые данные о характеристиках вольфрама отыщите самостоятельно в справочниках (или воспользуй-*

тесь другими источниками информации).

В рабочем режиме среднее по величине электрическое сопротивление R_0 лампочки равно $\left(U_{эфф}\right)^2 / W$. Для рассматриваемого примера $R_0 = 1{,}5$ Ом. Если напряжение на выводах лампы непостоянное, то температура нити накала изменяется со временем, причем запас тепловой энергии нити (внутренней энергии) меняется в результате двух процессов: получения энергии с мгновенной мощностью U_t^2 / R_T и потерь энергии посредством излучения (этот механизм теплопередачи в данном случае является основным). Мощность, теряемая нагретым телом, имеющим температуру поверхности T, определяется законом Стефана–Больцмана, поэтому

$$W = k(L\pi D)\sigma T^4,$$

где $L\pi D$ – это площадь горячей поверхности, k – интегральный коэффициент излучения, σ – постоянная Стефана–Больцмана. В этой формуле не учитывается обратный поток излучения от окружения к горячему телу, поскольку температура тела T (горячей спирали) во много раз больше температуры окружения $T_{окр}$. Согласно данным справочника «Таблицы физических величин», интегральный коэффициент теплового излучения для вольфрама с рабочей температурой нити накаливания T_0 пропорционален температуре T и равен $k_T = k_0 T / T_0$, где $k_0 = 0{,}325$. Это означает, что мощность излучения пропорциональна пятой степени температуры: $W = k_0 L\pi D\sigma T^5 / T_0$. Таким образом, получаем

$$L\pi D a d c_p \frac{dT}{dt} = \frac{\left(U_0 \cos\omega t\right)^2 T_0}{R_0 T} - \frac{k_0 L\pi D\sigma T^5}{T_0}. \qquad (*)$$

Получилось страшное на вид дифференциальное уравнение, однако для получения ответов на вопросы задачи решать его вовсе не обязательно.

Для начала поищем в интернете сведения о вольфраме. Набираем в «поисковике» слова «свойства вольфрама» и выбираем разные источники информации. Например, по данным таблицы «Теплофизические свойства, плотность вольфрама и его теплопроводность» при температуре 3000 К плотность вольфрама $d = 18{,}22 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c_p = 220$ Дж/(кг · К), теплопроводность $\lambda = 107{,}5$ Вт/(м · К), удельное сопротивление $\rho = 93{,}4 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Из перечисленных параметров только удельное сопротивление заметно меняется с температурой, причем можно считать, что оно просто прямо пропорционально температуре, поэтому $R_T = R_0 T / T_0$. Эта зависимость учтена в нашем уравнении $(*)$.

По указанным в условии геометрическим размерам спирали и излучаемой в окружающее пространство средней мощности можно найти длину спирали:

$$\frac{k_0 L\pi D\sigma T_0^5}{T_0} = k_0 L\pi D\sigma T_0^4 = 96 \text{ Вт},$$

$$\text{и } L \approx 17 \text{ мм}.$$

По величине среднего сопротивления лампочки можно найти и размеры поперечного сечения нити накала:

$$R_0 = \rho \frac{L}{a} \frac{\pi D}{a^2}, \text{ и } a = \sqrt[3]{\frac{\rho L\pi D}{R_0}} \approx 0{,}32 \text{ мм}.$$

Получается, что теплообмен спирали с внешней средой происходит так же, как и для трубы, у которой толщина стенок равна примерно одной трети от ее внешнего диаметра.

Из величин L и a можно найти объем спирали из вольфрама, а следовательно, массу и теплоемкость спирали:

$$m \approx dL \frac{\pi\left(D^2 - (D - 2a)^2\right)}{4} = dL\pi a(D - a),$$

$$C = mc_p \approx 0{,}0466 \text{ Дж/К}.$$

Для обеспечения потока тепла к внешней поверхности спирали нужно, чтобы вблизи этой внешней поверхности температура изменялась с глубиной, причем градиент температуры, т.е. «скорость» изменения dT/dx, должен быть таким, чтобы выполнялось условие

$$\frac{dT}{dx} L\pi D\lambda = W \approx 100 \text{ Вт}.$$

Из этого соотношения получаем

$$\frac{dT}{dx} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ К/м}.$$

На расстоянии $a \approx 0{,}3$ мм разница температур составит всего-то около 0,6 К. Таким образом, можно считать, что вся спираль по всему ее объему имеет примерно одинаковую температуру.

Совсем грубая оценка амплитуды изменения температуры может быть сделана так. Будем считать, что треть периода, равного 0,01 с, спираль получает энергию от сети мощностью 200 Вт, другую треть периода (две шестых части) получает среднюю мощность 100 Вт и, наконец, последнюю треть периода мощность, получаемая спиралью лампы от сети, равна нулю. А мощность, излучаемую спиралью, будем считать постоянной во времени и равной 100 Вт. При разнице мощностей, равной 100 Вт, за треть периода, т.е. за 0,003 с, теряется или приобретается энергия, равная приблизительно 0,3 Дж. При найденной теплоемкости спирали такая потеря или такое приобретение энергии соответствуют изменению температуры спирали на $\pm 6{,}4$ К. Эта величина значительно меньше средней температуры спирали, поэтому пульсации мощности излучения лампы накаливания, которая питается от сети переменного тока, незаметны глазу.

М.Арфьлов

Ф2536. *Заряд Q однородно распределен по поверхности цилиндра радиусом R и высотой H. Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноотстоящего от оснований) сечения. Найдите период малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = \frac{q}{m}$ известен.*

Для определения зависимости $E(r)$ вблизи положения равновесия воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через поверхность соосного с заряженным небольшого цилиндра – радиус основания r, высота h ($r, h \ll R, H$) – равен нулю. Найдем величины потоков через основания Φ_1 и боковую поверхность Φ_2 этого цилиндра (для определенности считаем заряды Q и q положительными):

$$\Phi_1 = 2\frac{\sigma \cdot 2\pi R h}{R^2 + H^2/4}\frac{H/2}{\sqrt{R^2 + H^2/4}}\pi r^2 = \frac{Q}{L^3}\pi r^2 h,$$

$$\text{где } L = \sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4}},$$

$$\Phi_2 = 2\pi r h E(r).$$

Эти потоки равны:

$$2\pi r h E(r) = \frac{Q}{L^3}\pi r^2 h.$$

Отсюда получаем, что в плоскости сечения, где находится бусинка, при ее смещении r из центра величина вектора напряженности пропорциональна смещению:

$$E(r) = \frac{Q}{2L^3} r.$$

Запишем уравнение движения бусинки:

$$mr'' = -q\frac{Q}{2L^3} r.$$

Отсюда находим частоту гармонических колебаний бусинки:

$$\omega = \sqrt{\frac{q}{m}\frac{Q}{2L^3}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\gamma Q}{2L}}$$

и период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi L\sqrt{\frac{L}{\gamma Q}}, \text{ где } L = \sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4}}.$$

В.Плис

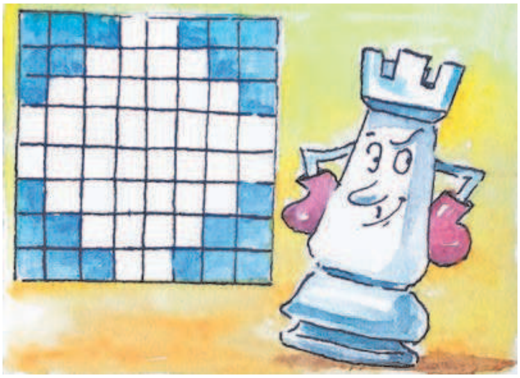
Задачи

1. На конференции присутствовали представители двух конкурирующих фирм «Индекс» и «Зугл» Алексей, Борис и Владимир. Представители одной и той же компании всегда говорят правду друг другу и врут конкурентам. Алексей сказал Борису: «Я из фирмы

«Индекс». Борис ответил: «О! Вы с Владимиром работаете в одной фирме!» Можно ли по этому диалогу определить, где работает Владимир?

М.Евдокимов

2. На шахматной доске закрашены несколько клеток, как показано на



рисунке. Сколькими способами можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей на незакрашенные клетки?

Е.Бакаев

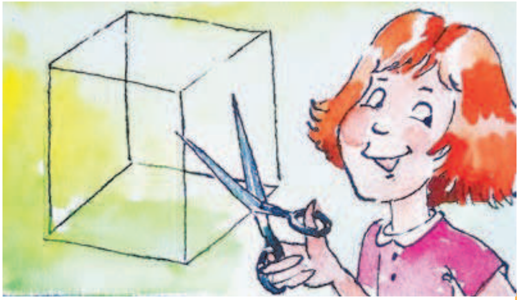
3. Илья совершенно не любит задачи на скорость и не помнит ни одной формулы. Когда его спросили, какое

расстояние проедет поезд, он попробовал и перемножить данные скорость и время, и сложить их, и даже поделить скорость на время. «У меня всегда получается одно и то же число! Наверное, это и есть правильный ответ!» – воскликнул Илья. Докажите, что выполнять арифметические действия Илья тоже не умеет.

А.Антропов

4. Разрежьте проволочный каркас куба на две части, из которых можно спаять каркасы двух кубов. Проволоку сгибать можно.

С.Токарев



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1 и 3 предлагались на XLI Турнире имени М.В.Ломоносова, задачи 2 и 4 – на XXIV Турнире математических боев имени А.П.Савина.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Четырьмя различными способами

В.РАСТОРГУЕВ

В 2008 ГОДУ НА ТУРНИРЕ ИМЕНИ М.В.Ломоносова школьникам предлагалась такая задача, придуманная С.Маркеловым:

Петя разрезал фигуру на две равные части, как показано на рисунке 1. Как

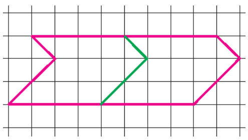


Рис. 1

разрезать эту фигуру на две равные части другим способом?

В решении приводилось целых два ответа (рис.2). А еще там ставился интересный

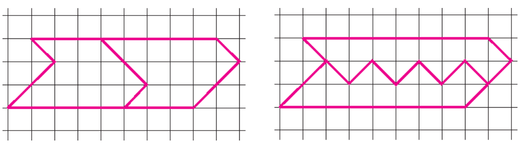


Рис. 2

вопрос: существует ли несимметричная фигура (не имеющая ни центра, ни оси симметрии), которую можно разрезать на две равные части четырьмя или большим числом способов? Ответ не был известен ни автору задачи, ни жюри турнира.

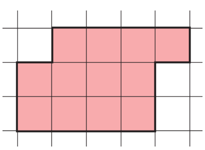


Рис. 3

Оказывается, такая фигура существует.

Прежде чем привести пример, покажем, что фигуру из задачи турнира можно «переделать» в совсем простую клетчатую фигуру (рис.3); вот три способа разрезать ее на равные части (рис.4).

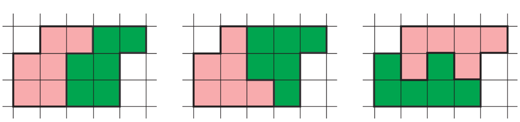


Рис. 4

А вот следующую фигуру (рис.5) можно разрезать на равные части четырьмя способами (рис.6).

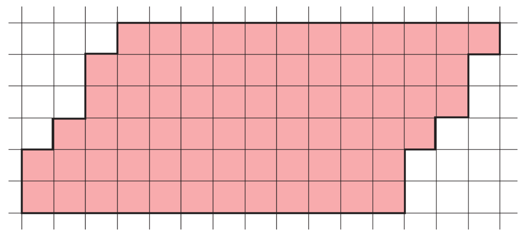


Рис. 5

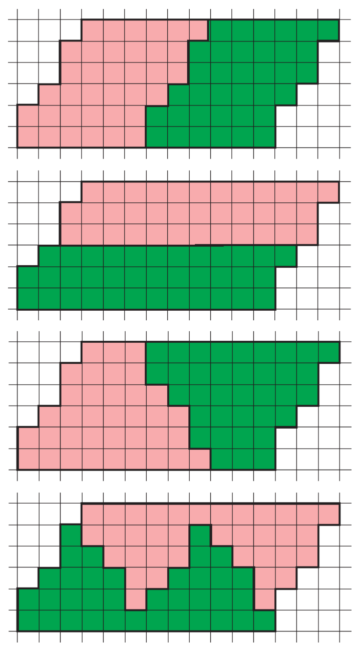


Рис. 6

Но может быть, и это не предел и бывают несимметричные фигуры, которые можно разрезать на равные части пятью, шестью, … способами? Слово вам, читатели!

Снаряд Тимофея

И.АКУЛИЧ

Герои популярного ныне телесериала «Ольга» (3-й сезон, 9-я серия) попали в затруднительную ситуацию, когда спрятались зимой в погребе на даче, а выходной люк из погреба оказался придавлен тяжелым сундуком. Но один из персонажей, его зовут Тимофей, не растерялся и в отчаянных попытках выбраться обнаружил то, что нужно: металлическую бочку без одного днища и ведро без крышки с карбидом кальция. (Конечно, это странно: хранить ведро с карбидом в подвале, где, как правило, сыро, вследствие чего карбид со временем придет в негодность. Что ж, будем считать, что хозяин дачи просто недосмотрел.)

Мгновенно гений-изобретатель сконструировал нечто вроде снаряда: налил в ведро воды и накрыл его сверху бочкой. Как и следовало ожидать, карбид вступил в реакцию с водой с выделением ацетилена:

$$CaC_2 + 2H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + C_2H_2\uparrow .$$

Подождав, пока в бочке образуется достаточное количество горючего газа, наш герой подпалил ее содержимое. (В качестве фитиля была использована пятитысячная рублевая купюра. Самоотверженный поступок!) От взрыва бочка взлетела вверх, как снаряд, и при этом не только разнесла люк и отбросила сундук, но и проделала дыры в потолке и крыше дома, взмыв в небеса на десятки метров. Очень эффектное зрелище!

А теперь давайте, придя в себя, сделаем кое-какие числовые оценки. Тимофей, используя воду и карбид кальция, сначала наполнил бочку *гремучей смесью*. Так принято называть смесь воздуха и любого горючего газа в теоретически необходимой пропорции – когда весь газ и кислород вступают в реакцию. Именно при таком соотношении выделяется наибольшее количество энергии на единицу объема смеси. Избыток того или иного компонента только ухудшает ситуацию: не все, что имеется, прореагирует.

Формула горения ацетилена такова:

$$2C_2H_2 + 5O_2 \rightarrow 4CO_2 + 2H_2O + Q ,$$

где Q – выделенное количество теплоты. И это количество немалое – согласно справочным данным, оно составляет примерно $58{,}7 \cdot 10^6$ Дж на кубометр ацетилена при нормальных условиях, т.е. при давлении 760 мм рт.ст. и температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$. В погребе зимой условия, надо полагать, как раз примерно такие. Из формулы горения видно, что на каждые 2 объемные доли ацетилена должно приходиться 5 объемных долей кислорода. Учитывая, что в воздухе содержится 21% кислорода, получаем, что на те же 2 объемные доли ацетилена должно приходиться $5/0{,}21 = 23{,}8$ долей воздуха, и потому в каждом кубометре гремучей смеси имеется (при «идеальном» соотношении) $\frac{2}{2+23{,}8} = 0{,}0775$ кубометра ацетилена.

Судя по виду, используемая Тимофеем бочка – стандартная, 200-литровая. Ее параметры легко найти в справочниках, и они таковы: объем бочки на самом деле $216{,}5$ л $= 0{,}2165$ м^3, ее высота 0,9 м, диаметр 0,585 м. Поэтому в объеме нашей бочки содержалось $0{,}0775 \cdot 0{,}2165$ м^3 $= 0{,}01678$ м^3 ацетилена и при взрыве выделилась тепловая энергия в количестве

$$Q = 58{,}7 \cdot 10^6 \cdot 0{,}01678 \text{ Дж} = 0{,}985 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Предположим, что *вся* выделившаяся тепловая энергия преобразовалась в кинетическую энергию W взлетающей бочки (хотя на самом деле это, конечно, не совсем так). Определим скорость бочки. Масса новой бочки (опять же, по справочникам) 16,3 кг, но в данном случае одно ее днище отсутствовало. Значит, бочка должна быть полегче. На сколько же? Если, что вполне логично, принять толщину стенок и днищ бочки одинаковой, то имеет смысл сначала определить площадь каждого днища: $\pi \cdot (0{,}585 \text{ м})^2/4 = 0{,}269 \text{ м}^2$ и боковой поверхности: $\pi \cdot 0{,}585 \text{ м} \cdot 0{,}9 \text{ м} = 1{,}653 \text{ м}^2$. Теперь мы можем без труда оценить массу бочки без одного днища:

$$m = 16{,}3 \text{ кг} \cdot \frac{0{,}269 + 1{,}653}{2 \cdot 0{,}269 + 1{,}653} = 14{,}3 \text{ кг}.$$

Вспомнив формулу для кинетической энергии, находим скорость бочки:

$$v=\sqrt{\frac{2W}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}985\cdot 10^6\ \text{Дж}}{14{,}3\ \text{кг}}}=371\ \text{м/с}\,.$$

Ничего себе! Действительно, получается солидный снаряд. Если бы на его пути не было препятствий (в виде пола, потолка, крыши и сундука, а также сопротивления воздуха), то бочка вознеслась бы на высоту

$$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{(371\ \text{м/с})^2}{2\cdot 9{,}8\,\text{м/с}^2}=7022\ \text{м}$$

– свыше 7 километров! Поэтому в целом следует признать, что создатели фильма не очень-то промахнулись. По крайней мере, в отношении разрушительной силы гремучей смеси. (Тимофей, по сюжету, после «выстрела» временно оглох. На самом деле едва ли все обошлось бы столь безобидно!)

Разумные читатели, конечно, вряд ли станут повторять сей эксперимент. Но поскольку при работе обычной газовой плиты всегда есть опасность погасания «факела» и образования именно гремучей смеси (состоящей, правда, не из ацетилена, а в основном из метана – но это несущественно), то можно сделать главный вывод: *соблюдайте правила безопасности при пользовании бытовыми газовыми приборами*!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Соседи на клетчатой решетке

Н.БЕЛУХОВ

В этой статье мы собираемся обсудить серию задач, близких по постановке к задаче М2500 («Квант» №2 за 2018 г.).

Начнем с такой задачи.

Задача 1. *Дано натуральное число $n \geq 2$. Все натуральное числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n\times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними (или соседями), если эти клетки имеют общую сторону. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d.*

У этой задачи давняя интересная история. Ее первые предшественники, известные автору, – это задачи 2 для 8 класса и 4 для 9 класса заключительного этапа Московской олимпиады 1963 года, в которых для случаев $n=8$ и $n=9$ требовалось доказать оценки $d\geq 5$ и $d\geq 6$ соответственно. Затем в статье А.Орлова «Принцип Дирихле» («Квант» №7 за 1971 г.) ставился вопрос о нахождении наибольшего n, для которого $d\leq 5$. Возможно, самый первый источник, содер-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20181203

жащий решение для общего случая, – это статья М.Гервера «Задача о числах в таблице» («Квант» №12 за 1971 г.). Поводом для написания этой статьи стали упомянутые задачи про частные случаи. Затем, почти 20 лет спустя, общая задача (или, более точно, задача о доказательстве нижней оценки на d) была предложена от Чехословакии на Международную олимпиаду 1988 года (на саму олимпиаду задача не попала, но вошла в так называемый шорт-лист задач-кандидатов). А еще почти через 20 лет эта задача появилась (без указания источника) в известной книге Белы Боллобаша «Искусство математики» (The Art of Mathematics).

В задаче 1 несложно предъявить расстановку, в которой все разности между соседями не превосходят n: просто пронумеруем все клетки верхнего ряда слева направо, далее продолжаем нумеровать клетки следующего ряда и т.д. Тогда разность чисел в каждой паре клеток, соседствующих по горизонтали, равна 1, а разность чисел в каждой паре соседей по вертикали равна n.

Оказывается, $d = n$ – действительно правильный ответ. Чтобы завершить решение, нужно доказать, что в любой расстановке найдутся два соседа, отличающиеся не менее чем на n. Это сложная часть решения.

Сначала набросаем «широкими мазками» подход к решению.

Зафиксируем некоторую расстановку A чисел в таблице. Теперь мы хотим ставить числа от 1 до n^2 в клетки пустой таблицы одно за другим, согласно расстановке A. Итак, вначале мы ставим число 1, затем 2, потом 3 и т.д. В какой-то момент мы дойдем до числа k (которое мы определим чуть позже) и остановимся. Пусть S – это множество из k клеток, которые мы заняли числами к моменту остановки. Рассмотрим множество T всех соседей множества S. Иначе говоря, T – множество всех клеток a, не лежащих в множестве S и имеющих хотя бы одну соседнюю клетку в множестве S. Представим себе, что нам удалось выбрать «время остановки» k таким образом, чтобы множество T содержало не менее n клеток. Тогда наибольшее число b, находящееся (в расстановке A) в клетке множества T, должно быть не меньше $k + n$. Пусть c – число в клетке множества S, соседней с b. Тогда $c \le k$. Поэтому разность $b - c$ не меньше n, что мы и хотели получить. Все, что нам осталось сделать, это объяснить, как выбрать подходящее время остановки k и доказать, что выбранное k действительно подходит.

На этом месте в решении нам нужно выбрать один из двух подходов. Если мы выберем k каким-то простым способом, то взамен получим сложности с доказательством того, что данное k подходит. Наоборот, мы можем попробовать выбрать k весьма нетривиальным образом, чтобы облегчить доказательство того, что оно подходит. Посмотрим, куда приведет нас каждый из этих подходов.

Первое решение. (Это решение фактически опирается на упражнение 3 из упомянутой статьи М. Гервера.) Определим k явным образом как

$$k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Теперь нужно показать, что множество T содержит не менее n клеток (для выбранного таким образом k).

Покажем, как это вытекает из следующей леммы, используемой в авторском решении задачи М2500 (см. «Квант» №9 за 2018 г.).

Лемма. *Пусть из таблицы $n \times n$ вырезали $n - 1$ клетку. Тогда среди связных частей, на которые распалась таблица, найдется часть, содержащая не менее $\frac{n^2 + n}{2}$ клеток.*

Итак, предположим противное, и T содержит не более $n - 1$ клеток. Удалим все клетки множества T. Тогда каждая компонента связности C оставшейся части таблицы – либо подмножество множества S, либо не пересекается с $S \cup T$. В первом случае C содержит не более $|S| = \frac{n^2 - n}{2}$ клеток. Во втором случае C содержит не более $n^2 - |S| - |T| \le n^2 - \frac{n^2 - n}{2} - 1 = \frac{n^2 + n}{2} - 1$ клеток. Однако, согласно лемме, одна из компонент, на которые распадается оставшаяся часть таблицы, должна содержать не менее $\frac{n^2 + n}{2}$ клеток! Мы пришли к противоречию, завершающему решение.

Второе решение. (Ход этого решения в целом соответствует изложению в статье М.Гервера.)

В этом решении мы выберем время остановки k более тонко.

Пока мы заполняем таблицу, расставляя числа одно за другим, мы собираемся проследить, когда впервые выполнится некоторое условие, и ровно перед этим моментом мы сделаем остановку. А условие заключается в следующем: найдется целиком заполненный числами ряд (столбец или строка). Иными словами, мы останавливаемся в тот момент, когда после выставления чисел 1, 2, …, k каждый ряд все еще содержит хотя бы одну незаполненную клетку, но это условие нарушилось бы после постановки числа $k+1$. (Отметим, что в отличие от первого решения задачи 1 время остановки здесь существенно зависит от расстановки A.) Покажем, что T содержит хотя бы n клеток, если мы выбираем k указанным способом.

Пусть e – это клетка, в которой должно стоять число $k+1$ (согласно расстановке A). По нашему выбору числа k заполнение клетки e сделало бы полностью заполненным ряд, содержащий клетку e. Для определенности считаем, что после заполнения клетки e заполняется целиком ее строка R, т.е. все клетки в ряду R, кроме самой клетки e, принадлежат множеству S. Рассмотрим любой столбец C, отличный от столбца, в котором находится e. Общая клетка R и C принадлежит S. С другой стороны, в момент k столбец C еще не полностью заполнен числами, значит, хотя бы одна клетка из C не принадлежит S. Таким образом, C содержит как клетки из S, так и клетки, не принадлежащие S. Поэтому в C находится хотя бы одна клетка из T. В столбце, который содержит клетку e, тоже есть клетка из T – это сама клетка e. Следовательно, каждый из n столбцов содержит хотя бы одну клетку из множества T. Тем самым, T содержит хотя бы n клеток, что завершает решение.

Задача 1 является «общим предком» для большого семейства связанных друг с другом задач. Идея выбора времени остановки работает во многих их них. Иногда можно определить время остановки k довольно простым способом и потратить больше сил на доказательство того, что оно подходит. В других случаях лучше с большей аккуратностью выбирать k, чтобы облегчить себе работу в доказательстве того, что это k подходит.

Задача 2. *Пусть n – четное натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки находятся в одной строке или в одном столбце. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d.*

Эта задача предлагалась на заключительном этапе Всероссийской олимпиады 2002/03 учебного года (задача 8 для 10 класса). В оригинальной формулировке $n = 20$, и в задаче требовалось найти наибольшее натуральное d такое, что каждая расстановка содержит два соседних числа, отличающихся не менее чем на d.

В качестве *указания* [1] предъявим подходящее время остановки $k = \dfrac{n^2}{4} + 1$.

(Что происходит в задаче 2 для нечетных n?)

Задача 3. *Пусть n – нечетное натуральное число. Рассмотрим таблицу $n \times n$. Левый край таблицы приклеивается к ее правому краю, а верхний – к нижнему, так что таблица приобретает форму тора (бублика). Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону. (Заметим, что из-за склейки в каждой строке самая левая и самая правая клетки соседние и, аналогично, в каждом столбце самая верхняя и самая нижняя клетки соседние. Таким образом, у каждой клетки ровно четыре соседа.) Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности между соседями не превосходят d.*

Эта задача предлагалась на олимпиаде Romanian Masters в 2011 году (задача 6). В оригинальной формулировке $n = 2011$ и требовалось найти

[1] Указания и замечания к задачам 2–5 следуют официальным решениям, предлагавшимся на олимпиадах. Найти подробные решения читатель может в соответствующих источниках.

наибольшее натуральное d такое, что каждая расстановка содержит два соседних числа, отличающихся не менее чем на d.

Указание. Остановиться надо в последний момент, для которого либо в каждой строке не менее двух незанятых клеток, либо в каждом столбце не менее двух незанятых клеток.

(Что меняется в задаче 3 для четных n?)

Задача 4. *Пусть n – четное натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все суммы в парах соседних чисел не превосходят d.*

Это задача с заключительного этапа Всероссийской олимпиады 1996/97 учебного года (задача 8 для 9 класса). В оригинальной формулировке $n = 10$.

Приведем *набросок* решения этой задачи. Вначале разрежем таблицу на $\frac{n}{2}$ прямоугольных горизонтальных полосок $2 \times n$. Аналогично разрежем таблицу на $\frac{n}{2}$ вертикальных полосок $n \times 2$. Можно доказать следующую лемму (применяя подход с выбором фиксированного момента остановки).

Лемма. *Пусть $l \le n-1$ – натуральное число. Предположим, что некоторая полоска F содержит ровно l клеток из S, никакие две из которых не являются соседними. Тогда F также содержит хотя бы $l+1$ клеток из T.*

Теперь, используя два разрезания таблицы на полоски и утверждение леммы, можно перейти собственно к решению.

Мы будем расставлять числа от n^2 до 1 одно за другим в порядке убывания, т.е. вначале мы ставим число n^2, затем n^2-1, потом n^2-2 и т.д. Применим подход с выбором «плавающего» момента остановки. Мы остановимся ровно в тот момент, когда в каждой горизонтальной и в каждой вертикальной полоске будет заполнена хотя бы одна клетка. В случае если к этому моменту нашлись уже заполненные соседние клетки, то несложно показать, что сумма чисел в некоторых двух соседях достаточно большая (больше верного ответа).

В случае, когда среди заполненных клеток нет двух соседних, можно завершить решение, используя лемму.

(Что происходит в задаче 4 для нечетных n?)

Кроме выбора времени остановки, есть и совершенно другие подходы, которые иногда работают эффективнее.

Задача 5. *Пусть $n \ge 2$ – натуральное число. Все натуральные числа от 1 до n^2 расставляются в клетки таблицы $n \times n$ произвольным образом. Скажем, что две клетки (а также числа, находящиеся в них) являются соседними, если эти клетки имеют общую сторону или вершину. Найдите наименьшее натуральное d такое, что существует расстановка чисел, в которой все разности соседних чисел не превосходят d.*

Это задача с Турнира городов 1990/91 учебного года (осенний тур, задача 1 тренировочного варианта для 10 и 11 классов). В оригинальной формулировке требовалось доказать точную нижнюю оценку на d.

Указание. Пусть имеется расстановка чисел, в которой все разности соседних чисел не превосходят d. Пусть шахматному королю требуется s ходов, чтобы пройти из некоторой клетки a в клетку b. Оцените сверху разность между числами, находящимися в клетках a и b. Далее получите нижнюю оценку на d, рассмотрев клетки с числами 1 и n^2.

Подводя итоги, давайте еще раз посмотрим, какие изменения происходят в формулировках задач 2–5 по сравнению с задачей 1.

В задачах 2 и 5 мы меняем определение «соседства». В задаче 2 две клетки считаются соседними тогда и только тогда, когда они отстоят друг от друга на ход ладьи. А в задаче 5 две клетки по определению соседние, если отстоят друг от друга на ход короля.

Есть много естественных способов определить, какие пары клеток называть соседними. Мы также можем определить соседство с точки зрения ходов других шахматных фигур, например коня, ферзя, или фигур из сказочных шахмат. Так, (p,q)-

скакуном называют фигуру, которая может за ход сдвигаться на p клеток вдоль одного направления (по горизонтали или по вертикали) и на q клеток вдоль перпендикулярного направления (скажем, обычный шахматный конь является $(1, 2)$-скакуном). Или, например, рассмотрим (p, q)-*гонщика*, который может ходить, как (kp, kq)-скакун, для любого натурального k (так, ладья – это $(0, 1)$-гонщик).

Далее, в задаче 3 мы меняем форму решетки.

Снова отметим: имеется много других решеток, на которых можно рассматривать ту же постановку задачи. Кроме обычной прямоугольной и торической решеток, можно рассмотреть решетки на других поверхностях: на цилиндре, на ленте Мёбиуса, на бутылке Клейна. Можно также рассматривать пространственные решетки и далее изучать многомерные решетки. Или можно исследовать другие разбиения, такие как треугольная сетка или шестиугольные «соты». И так далее.

Наконец, в задаче 4 мы занимались суммами (вместо разностей) чисел в соседних клетках. Конечно, ничто не мешает нам изучать и другие операции, например деление или умножение.

Все указанные вариации постановки задачи могут по-разному комбинироваться друг с другом.

Задача М2500 – одно из самых недавних добавлений в это постоянно растущее семейство. По сравнению с задачей 1, в ней изменен еще один параметр. В задаче 1 мы хотим, чтобы все разности между числами в соседних клетках были как можно меньше, а в задаче М2500 мы желаем сделать все эти разности как можно больше. Наверное, не нужно говорить, какие новые постановки задач получаются, если комбинировать эту вариацию с перечисленными ранее.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Диффузия: кого, куда и вообще

Л.АШКИНАЗИ

В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ФИЗИКИ ОБЫЧНО упоминаются два примера диффузии – кусок свинца и кусок золота, которые прижали друг к другу, и флакон с духами, который открыли в комнате. Первая ситуация намного сложнее, чем кажется, а во второй ситуации запах распространяется в основном вообще не из-за диффузии. Объединяет же эти две ситуации то, что в обоих случаях происходит распространение одного вещества в другом. Но для того чтобы можно было говорить о диффузии, даже это не обязательно! Потому что есть понятие *самодиффузия*. С другой стороны, не всякое распространение стоит называть диффузией. Однако, попробуем рассказать об всем по порядку.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20181204

Начнем именно с этой самой самодиффузии. Которых есть даже две – объемная и поверхностная. Пусть у нас имеется кусок вещества и пусть все его атомы одинаковы. Эти атомы колеблются вокруг положений равновесия, причем амплитуды колебаний сами могут изменяться. Вот некоторый атом так сильно отклонился от положения равновесия, что вообще не вернулся обратно, а переместился в другое «устойчивое положение» и, естественно, занялся колебаниями вокруг него.

В этом месте критически мыслящий школьник должен задать вопрос: оба процесса зависят от времени, как мы их разделим? Может, атом вообще только и делает, что прыгает? Ответ звучит так: оцените и сравните время колебания атома в решетке и среднее время перескока атома в соседнее положение. Очень грубая приближенная оценка дает для этих времен значения 10^{-12} с и 10^{-5} с соответственно. Таким образом, атом перемещается в соседнее положение, совершив в среднем десять миллионов колебаний.

Вопрос 1. Как можно оценить эти времена?

Но если атомы одинаковы, то как определить, что они перемещаются? Надо как-то их пометить – так, чтобы это не повлияло на их перемещение, но позволило отличать одни от других. Предположим, нам надо исследовать самодиффузию в каком-то элементе. Возьмем немножко изотопа этого элемента, добавим его в какое-то место образца и посмотрим, как эти редкие атомы расползаются по образцу. Особенно это удобно делать, если добавленный изотоп радиоактивен – тогда мы можем измерять активность разных частей образца. Соответствующий метод называется довольно естественно: «метод меченых атомов». Правда, тут есть одно возражение. Атомы изотопов одного элемента имеют разные массы, а масса влияет на колебания. Поэтому атомы добавленного изотопа могут диффундировать не совсем так, как атомы исходного образца. Обычно этим пренебрегают, но при необходимости данный эффект можно попытаться обнаружить.

Вопрос 2. Подумайте, как.

Самодиффузия важна для нескольких процессов, например для спекания порошков или для медленного изменения размеров образца под нагрузкой (крип, или ползучесть). Процесс спекания порошков очень широко применяется в технике – так, именно спеканием порошков получают многие металлические и большинство керамических изделий. А ползучесть важна, скажем, для лопаток турбин; по понятным причинам у нее даже есть специальное название: «высокотемпературная ползучесть». Для спекания порошков важна не только просто самодиффузия, т.е. перемещение атомов в объеме, но и так называемая поверхностная диффузия или поверхностная миграция, т.е. перемещение атомов по поверхности. Представьте себе контакт между двумя маленькими шариками по еще более маленькому пятнышку. Спекание – это увеличение размеров этого контакта. Чтобы подобраться к нему по объему, атомам приходится протискиваться через область сечением, пропорциональным площади пятнышка, т.е. квадрату диаметра, а чтобы подползти по поверхности, нужно двигаться по дорожке хоть и узкой, но по ширине равной периметру пятнышка, т.е. первой степени диаметра. Иными словами, при уменьшении диаметра путь по объему усложняется быстрее, чем путь по поверхности. Кроме того, атом в объеме связан с большим числом атомов, чем атом на поверхности, и поэтому диффундировать атому труднее, чем мигрировать.

В однородном образце с самодиффузией может быть связано еще несколько процессов. Один из них – перемещение дефектов кристаллической решетки. Если этот дефект представляет собой лишний атом (атом в междоузлии) или отсутствие атома там, где он должен быть (вакансия), то связь перемещения дислокации и перемещения атома очевидна. В первом случае это просто одно и то же, во втором – вакансия «перемещается» строго навстречу перемещению атома. В некоторых случаях связь сложнее, но она все равно есть. Почему же говорят о диффузии вакансий и анализируют поведение вакансий, а не только атомов? Потому же, почему мы говорим «тело летит» или «тело вращается», а не пишем уравнения для движения его молекул. Во-первых, так проще, а во-вторых, во многих случаях нам важно именно движение тела, а не составляющих его молекул.

Вопрос 3. А если каким-то чудом часть молекул тела начнет двигаться иначе, то что произойдет?

Аналогичная ситуация имеет место в проводимости полупроводников – вспомните понятие «дырка».

На самодиффузию могут влиять внешние факторы – все, что как-то влияет на атомы или, если это ионная решетка, на ионы, т.е. электрические поле и ток. Влияние тока называют электронным ветром, и в металлах он преобладает. Перемещение ионов и вакансий под действием тока существенно в микросхемах. Плотность тока в проводниках микросхем весьма велика (токи-то небольшие, но сечение проводников уж очень мало), электроны движутся по проводнику, увлекают за собой ионы, дислокации-вакансии движутся, стало быть, навстречу, скапливаются на одном из концов проводника, он делается тоньше и в итоге разрывается.

Вопрос 4. Кстати, что еще происходит при этом процессе?

Что будет происходить, если вещество состоит не из отдельных атомов или ионов, а из многоатомных молекул – как, например, твердые водород, кислород, азот, галогены? Ничего ужасного, просто диффундировать будут не отдельные атомы, а, естественно, молекулы. А если эти молекулярные кристаллы состоят из молекул, которые сами состоят из разных атомов – например, H_2O, CO_2, окислы азота, многие органические вещества? Опять же, ничего принципиально нового – хотя мы уже имеем дело с разными атомами, но они составляют молекулы, которые ведут себя, как целое.

Картина существенно меняется, когда вещество состоит из разных атомов, не связанных в молекулы. Тогда каждый атом может диффундировать, причем разные атомы диффундируют по-разному. Но при этом диффузия каждого зависит от диффузии остальных. Рассмотрим часто встречающийся случай, когда у нас имеется матрица и малая примесь. Однако и этот случай не прост, потому что есть несколько путей диффузии. Атом примеси может диффундировать, скажем так, сам по себе, прыгая из одного положения между атомами основного вещества в другое – как диффундировала бы мышь в человеческой толпе. Но он может диффундировать, пользуясь вакансиями, т.е. пустыми местами в решетке. Причем вакансии диффундируют сами по себе, это один из механизмов самодиффузии. Таким образом, диффузия примеси оказывается связана с самодиффузией материала матрицы.

Но этим дело не исчерпывается. На диффузию начинают влиять свойства, которые принято называть химическими. Если одно вещество диффундирует в другое и в какой-то зоне концентрация превосходит предел растворимости, то появляется новая фаза, т.е. образуется соединение. Иногда это отдельные участки, так называемые включения второй фазы, а иногда это сплошные слои. Включения второй фазы существенно изменяют механические свойства вещества, а сплошные слои влияют на дальнейшие процессы диффузии.

Как уже говорилось, в матрице – если только это не идеальный монокристалл, причем при абсолютном нуле – есть дислокации, нарушения. Вакансии – это только один из их типов, но есть и другие, чьи концентрация и подвижность растут с ростом температуры. Дислокации некоторых типов создают возможности для диффузии примесей, причем эти возможности сложным образом зависят от температуры. В поликристаллах ко всей этой картине добавляются границы между кристаллами, так называемые межзеренные границы. И они тоже могут являться путями диффузии примесей.

Границы между кристаллами – это их поверхности. А диффузия по поверхности идет легче, чем по объему, потому что атом на поверхности имеет меньше связей с другими атомами, нежели атом в объеме, и ему легче разорвать часть этих связей, чтобы переместиться в новое положение. Поверхностная диффузия стала важна для техники, когда в 60-е годы прошлого века вошла в моду порошковая металлургия. Важна она и поныне хотя бы потому, что позволяет спеканием порошков (а это поверхностная диффузия) получать материалы, которые невозможно получить другими методами. В ближайшие десятилетия роль поверхностной диффузии и вообще поверхностных эффектов будет только возрастать – чем меньше объект, тем больше отношение поверхности к объему, а значит, тем существеннее роль именно поверхности.

Вопрос 5. Подумайте, почему.

Как делаются элементарные, но дающие правильные ответы расчеты, касающиеся диффузии, а также какие нетривиальные эффекты возникают, когда свинец прижат к золоту и оставлен в покое на какое-то время, вы можете узнать из двух замечательных книжек: Гегузин Я.Е. «Очерки о диффузии в кристаллах» и Бокштейн Б.С. «Атомы блуждают по кристаллу» (Библиотечка «Квант», вып. 28). Насчет именно свинца и золота – шутка. В этих книжках рассказано о многих экспериментах; в интернете они есть на многих сайтах. Диффундируйте и наслаждайтесь.

До сего момента речь шла о диффузии в твердом теле. Диффузия в жидкостях и газах, конечно, возможна, но тут есть свои особенности. Главная – движение потоков, течения в жидкости, сквозняки и ветер в атмосфере. Они тоже переносят вещество, и в обычных условиях гораздо эффективнее, чем диффузия. Поэтому пример «диффузии», который часто приводится в книжках, а именно распространение запаха духов, неверен. Это не диффузия, а ветер.

Вопрос 6. Кстати, от чего еще, кроме диффузии и скорости ветра, зависит распространение запаха?

Когда мы обсуждали диффузию в твердом теле, то разделили диффузию в объеме и по поверхности. Приповерхностный слой может немного отличаться от объема – для жидкостей это указано в школьном учебнике. Для твердых тел такое отличие тоже возможно – по концентрации дислокаций, по электронным свойствам, по составу. Поэтому диффузия в приповерхностной области идет иначе, нежели в объеме. Но поверхностной диффузией или миграцией называют не ее, а именно перемещение по самой поверхности, ползание по ней.

А существует ли поверхностная диффузия в жидкостях и газах? Сама граница жидкости, как явление природы, вполне существует. Границу жидкости с твердым телом и газом мы видим в каждой луже и каждом стакане. Границу газа с твердым телом и жидкостью мы тоже видим постоянно. Границу двух жидкостей вам могли показывать на уроке.

Вопрос 7. А как увидеть границу двух газов?

Границу двух газов можно обнаружить косвенно, и это вам на уроке тоже почти наверняка показывали, но скорее всего – на уроке химии. А раз существуют границы между двумя жидкостями и между двумя газами, а также между жидкостью и газом, то вполне можно спросить: существует ли поверхностная диффузия в этих трех случаях?

Вопрос 8. Почему вода испаряется быстрее, когда над ней дует ветерок? Какой побочный процесс может уменьшать этот эффект?

Диффузией в физике называют распространение не только атомов или молекул, но и элементарных частиц. Скажем, диффузией излучения называют распространение излучения в среде при наличии многократного поглощения и последующего некогерентного испускания фотонов. Заметим, что распространение излучения в лазере, когда имеет место когерентность, так не называют. Пример диффузии излучения – распространение излучения в плотном горячем газе, например в атмосфере Солнца. В действительности аналогия между диффузией атомов и диффузией излучения не точна, потому что после поглощения кванта одной частоты может быть испущен новый квант другой частоты. Например, при тех температурах, которые имеются в центре Солнца, а это 15 миллионов градусов, основная энергия излучения приходится на рентгеновский диапазон. Но из-за многократного поглощения и переизлучения до поверхности излучение доходит за время порядка 1 миллиона лет, при этом его спектр существенно изменяется – длина волны увеличивается в 2500 раз, и мы получаем водимое излучение.

Что касается диффузии других элементарных частиц, то за примером далеко ходить не надо – диффузия водорода в металлах (он неплохо диффундирует в палладии, никеле и некоторых других) происходит в виде ионов водорода. А что это, как не элементарные частицы – протоны? Вот про диффузию в металлах дейтерия и трития этого сказать уже нельзя.

В атомном реакторе диффундируют нейтроны, возникающие при распаде ядер. Быстрые нейтроны при диффузии отдают энергию среде и замедляются. Если поглощение нейтронов мало, то они замедляются до тепловой энергии и продолжают диффундировать в среде, пока не поглотятся одним из ядер (вызвав, возможно, его распад) или не выйдут за границу среды.

В качестве внешних факторов, влияющих на диффузию, выше были названы ток (электронный ветер) и электрическое поле. Причем это поле может быть внешнего происхождения (батарейка и проводочки), а может быть и внутреннего происхождения. Представьте себе частично ионизированную плазму. Электроны существенно легче ионов, они диффундируют быстрее, чем ионы, и если плазма не заполняет какой-то объем полностью и электронам есть куда сбежать, то они отдаляются от ионов. Заряды разделяются, возникает электрическое поле, которое тормозит электроны и пытается ускорить ионы. Но второе у него получается плохо – именно потому, что ионы тяжелее во много раз. Процесс диффузии, при котором электроны в значительной мере привязаны полем к ионам и поэтому в основном сохраняется нейтральность плазмы, имеет свое название – амбиполярная диффузия. Правда, красиво?

Особая ситуация возникает, когда плазма погружена в магнитное поле. Оно ограничивает движение заряженных частиц поперек поля, заставляя их двигаться по винтовым траекториям. В этом случае наличие столкновений – это единственная возможность для частиц скачком изменить направление вектора скорости и сместиться поперек магнитного поля.

Слово «диффузия» вообще-то латинское и означает просто «распространение». Поэтому в быту называют диффузией все, что хоть в каком-то смысле распространяется. Да и в физике это слово применяется шире, чем рассказано выше. Например, иногда говорят «распространение тепла», а иногда – «диффузия тепла». Впрочем, второе выражение применяется на порядок реже. Всякое ли распространение можно назвать диффузией? Для физики естественно деление каких-то процессов (например, процессов распространения) на группы (например, диффузии и не диффузии) по закономерностям, которым они подчиняются. Если распространяется вещество, то его можно характеризовать распределением в пространстве (на дне стакана с чаем сахар есть, а выше – нет), если тепло – распределением температуры (за окном холодно). Распространение характеризуется изменением концентрации в данном месте – сейчас вещества здесь нет, а вот через минуту оно появилось. Связь этих двух характеристик – распределения в пространстве и скорости изменения в данной точке – и будет основной характеристикой диффузии.

При любом ли распространении эта связь одинакова? Нет. Представьте себе, например, как капиллярными силами втягивается вода в губку. В каждой точке концентрация сначала ноль (вода еще не поднялась до этого уровня), потом концентрация скачком возрастает и перестает изменяться. Правда же, сахар в стакане и тепло в ручке сковороды (осторожно!) распространяется не так? Тем не менее, говорят и про диффузию в пористых средах. Название – не самое главное в жизни, важнее правильно писать уравнения и решать задачи.

Если вы когда-то займетесь физикой диффузии, там вас ожидают многие и разные неожиданности. Вас ждет диффузия в новейших сплавах и в недрах Земли, диффузия в глубинах звезд и в межзвездном пространстве. Причем неожиданности будут встречаться на каждом шагу, как это обычно и бывает в физике. Например, вы обнаружите, что, согласно классическому уравнению теплопередачи и уравнению диффузии, скорость распространения получается… бесконечной. Физика, конечно, с этим как-то справляется, но как? Почему на это не часто обращают внимание? Почему это не мешает решать практические задачи, но почему об этом надо знать и помнить?

А потому, что сфера применения физики расширяется и в новой задаче может оказаться важным то, чем привыкли пренебрегать.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ

ФИЗИКА

ВАРИАНТ 1

1. Тело массой M подвешено на длинной невесомой нити. Нить отклонили так, что тело поднялось на высоту h. После этого тело отпустили. В момент, когда оно проходило нижнюю точку траектории, в тело попал горизонтально летевший пластилиновый шарик, который прилип к телу, после чего тело остановилось. С какой скоростью летел шарик, если его масса m?

2. Шарик массой $m = 100$ г подвешен к потолку на легкой пружине длиной $l = 0{,}5$ м и жесткостью $k = 100$ Н/м и совершает вертикальные колебания с амплитудой $A = 2$ см. Найдите наибольшее ускорение шарика.

3. Два точечных заряда q_1 и q_2 расположены на некотором расстоянии друг от друга в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Энергия их взаимодействия равна W. Заряды поместили в бесконечную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 4$, сохранив их расположение. Энергия их взаимодействия стала равна W_1. Найдите отношение W_1/W.

4. Сила тока в металлическом проводнике равна $I = 1$ А, сечение проводника равно $S = 5$ мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ свободных электронов, определите среднюю скорость $\langle v \rangle$ их упорядоченного движения.

5. Ток насыщения, протекающий через вакуумный фотоэлемент при его освещении светом, равен $I_н = 0{,}5$ нА. Определите число N фотоэлектронов, покидающих поверхность катода в единицу времени. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

6. Один моль идеального газа переводят из состояния *1* по изобаре в состояние *2*, а затем из состояния *2* в состояние *3* по изохоре. Найдите температуру газа в конечном состоянии. Считайте, что T_1, p_1, p_3, V_1, V_2 известны. При каких начальных условиях конечная температура будет равна начальной?

7. Тонкая однородная палочка шарнирно закреплена за верхний конец. Нижний конец палочки погружен в воду. При равновесии под водой находится $k = 1/5$ часть длины палочки. Определите плотность материала, из которого изготовлена палочка. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3.

8. Имеется виток из проводящего материала радиусом R, по нему течет ток I. Найдите магнитное поле на оси кольца в точке P, находящейся на расстоянии L от центра кольца (рис.1).

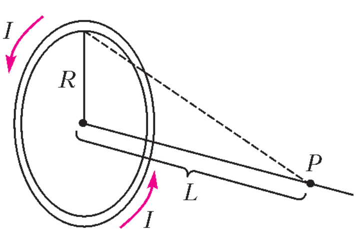


Рис. 1

ВАРИАНТ 2

1. Брусок массой m покоится на горизонтальной шероховатой поверхности. К нему прикреплена пружина жесткостью k. Какую работу надо совершить для того, чтобы сдвинуть с места брусок, растягивая пружину в горизонтальном направлении, если коэффициент трения между бруском и поверхностью равен μ?

2. Заряд $q = 0{,}5$ нКл равномерно распределен по сфере радиусом $R = 25$ см. Найдите разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях $r_0 = 5$ см и $r = 50$ см от центра сферы.

3. Протон в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл описал окружность радиусом $R = 10$ см. Найдите скорость протона. Заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Масса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

4. К конденсатору емкостью $C = 10$ мкФ, заряженному до напряжения $U_0 = 6$ В, подключили катушку индуктивности. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе уменьшилось до $U = 4$ В, сила тока в катушке составила $I = 10$ мА. Чему равна индуктивность катушки?

5. Выразите, в единицах постоянной Ридберга R, частоту ω головной линии спектральной серии Лаймана атома водорода.

6. Над молем идеального одноатомного газа совершают циклический процесс $V = V(T)$ (рис.2). Определите КПД цикла,

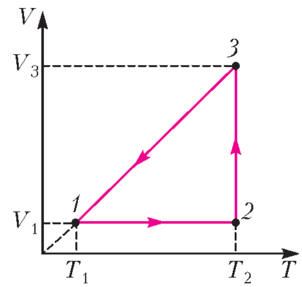


Рис. 2

зная, что в начальном состоянии *1* температура газа T_1, отношение $\frac{V_3}{V_1} = n$, а при изотермическом процессе *2–3* совершается работа A.

7. Деревянный шар привязан тонкой нитью ко дну цилиндрического сосуда с площадью дна $S = 100$ см^2. В сосуд наливают жидкость так, что она полностью закрывает шар, при этом нить натянута, располагается вертикально и действует на шар с некоторой силой T. Если нить перерезать, то шар всплывет, а уровень жидкости изменится на величину $h = 5$ см. Найдите силу натяжения нити T. Плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

8. Трамвай массой M с двигателем постоянного тока движется вверх по улице под углом α к горизонту с постоянной скоростью v. Найдите силу тока в двигателе, если напряжение равно U, КПД трамвая η, коэффициент трения μ.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

МАТЕМАТИКА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1 (8–9, 10, 11)[1]. Сравните числа

$$\left(10^{2017} + 10^{2016} + \ldots + 10 + 1\right)^{2018} \text{ и } \left(10^{2018} + 10^{2017} + \ldots + 10 + 1\right)^{2017}.$$

2 (8–9, 10). Найдите все четные натуральные числа n, у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{2}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

3 (8–9, 10). Сколькими способами из первых n натуральных чисел 1, 2, …, n можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

4 (8–9, 10). Из пункта A в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из A в D проходит через пункты B и C. В пункте B навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте C навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость еще на 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D.

5 (8–9). Про натуральные числа a, b, c известно следующее:

a^b делится на c;
b^c делится на a;
c^a делится на b.

Докажите, что $(a + b + c)^{a+b+c}$ делится на произведение abc.

6 (8–9, 10). В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол DAB прямой. Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой. Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.

7 (8–9). Известно, что существует натуральное число N такое, что $\left(\sqrt{3} - 1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}$. Найдите N.

8 (10). Произведение положительных чисел a и b больше 1. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ верно неравенство

$$(a + b)^n > a^n + b^n + 2^n - 2.$$

9 (8–9, 10, 11). Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D (рис.3). Докажите, что сумма длин дуг $\overset{\smile}{BA} + \overset{\smile}{DC}$ больше суммы длин дуг $\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{CB}$.

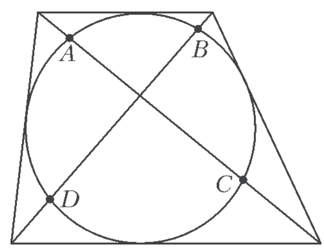


Рис. 3

10 (11). Решите уравнение

$$x^2 - 2x \sin xy + 1 = 0.$$

11 (11). Натуральные числа от 1 до 100 записали подряд без пробелов. Затем между некоторыми цифрами поместили знак плюс. (Например, 1234567 + 891011…15 + + 1617…99100.) Может ли получившаяся в результате сумма делиться на 111?

12 (11). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 4. Известно, что для про-

[1] В скобках после номера задачи указан класс, в котором она предлагалась.

извольной точки M на продолжении высоты пирамиды SH (точка S находится между точками M и H) углы MSA, MSB, MSC, ASB, ASC и BSC равны между собой. Построен шар радиуса 1 с центром в точке S. Найдите объем общей части пирамиды $SABC$ и шара (объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$).

13 (11). Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N такое, что произведение $9 \cdot 5^n \cdot N$ представляет собой *палиндром*, т.е. число, десятичная запись которого справа налево и слева направо читается одинаково. Например, для $n = 1$ можно взять $N = 13$, так как $9 \cdot 5^1 \cdot 13 = 585$.

14 (11). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + (y-13)^2} + \\ \qquad + \sqrt{(x-18)^2 + (y-4)^2} = 15, \\ (x-2a)^2 + (y-4a)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

ФИЗИКА

9 класс

1. К потолку на невесомой нити подвешен груз 1. В свою очередь, к нижней части этого груза на невесомой нити подвешен груз 2. Отношение сил натяжения верхней и нижней нитей известно: $\frac{F_1}{F_2} = n$. Найдите отношение масс грузов $\mu = \frac{m_1}{m_2}$.

2. Если к телу, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложить силу $F = 120$ Н, направленную вниз (к земле) под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, то тело будет двигаться без ускорения. С каким ускорением a будет двигаться это же тело, если ту же силу направить вверх (от земли) под тем же углом α к горизонту? Масса тела $m = 25$ кг. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, $\sin 60° = 0{,}87$.

3. Какое напряжение U показывает вольтметр с внутренним сопротивлением $R = 10$ Ом, если через него за время $\tau = 10$ с протекает электрический заряд $q = 1$ Кл? Сила тока, текущего через прибор, постоянна.

4. Один моль идеального газа, взятого при температуре $T_0 = 300$ К, изохорически охладили так, что его давление в сосуде упало в $n = 3$ раза. Затем газ изобарически расширили так, что его температура стала равной первоначальной. Какое количество теплоты Q получил газ в указанном эксперименте? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}314$ Дж/(моль · К).

5. Маленький легкий шарик, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, упруго ударяется о вертикальную очень тяжелую стенку, движущуюся с постоянной скоростью v в том же направлении, что и шарик. Скорости $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ лежат в одной плоскости. Известно, что после соударения со стенкой шарик возвращается в ту точку, откуда его бросили. Через какое время τ после броска произошло столкновение шарика со стенкой? На каком расстоянии L от точки бросания шарика находилась стенка, когда произошло столкновение шарика со стенкой?

10 класс

1. Флейта Пана представляет собой набор трубок разной длины из тростника, закрытых с нижнего конца (рис.4). Если дуть на верхний конец трубки, она издает звук. Какой должна быть длина трубки, чтобы звучала нота *соль* второй октавы? Этой ноте соответствует частота звука 880 Гц. Скорость звука равна 340 м/с. Как изменится звук, если тростниковые трубки заменить на медные?

Рис. 4

2. Вычислите концентрацию n и оцените среднее расстояние $\langle r \rangle$ между молекулами азота при условиях, близких к нормальным (давление 10^5 Па, температура 0 °С).

3. Два тела, массы которых m_1 и m_2, находятся на гладкой плоскости и соединены нерастяжимым шнуром массой m. На тело массой m_1 действует сила F. При какой силе F_0 шнур порвется, если неподвижный шнур, прикрепленный к стене, рвется под действием силы T_0?

4. Капля воды с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 73$ мН/м находится в невесомости между двумя гладкими параллельными пластинами, жестко скрепленными друг с другом. Вода смачивает пластины таким образом, что капля представляет собой цилиндр диаметром $D = 2$ мм с прямыми углами при основании. Определите силу, действующую на каждую из пластин со стороны капли.

5. См. условие задачи 5 для 9 класса. А вопрос другой: через какое время τ_1 после столкновения шарика со стенкой шарик вернулся в точку бросания?

11 класс

1. Усеченная пирамида (рис.5) помещена в электростатическое поле. Когда измерили потенциалы точек A', B' и C', оказалось, что они одинаковы и равны 5 В, а в точке пересечения высоты пирамиды с основанием потенциал равен 6 В. Найдите возможные направления вектора напряженности электрического поля в точке пересечения высоты пирамиды с плоскостью треугольника $A'B'C'$. Известно, что угол между плоскостями, в которых лежат треугольники $A'B'C'$ и ABC, равен $30°$. Площадь треугольника $A'B'C'$ много меньше площади треугольника ABC.

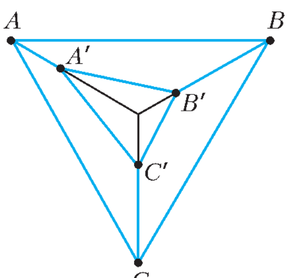


Рис. 5

2. В капилляре радиусом $r_0 = 1$ мм находится слабо смачивающая его стенки жидкость с показателем преломления $n = 1{,}4$ (рис.6). Через капилляр снизу вверх пропустили параллельный световой пучок такого же радиуса r_0. На экране, расположенном на расстоянии $l = 10$ см от мениска, образованного жидкостью, наблюдается пятно света радиусом $r = 5$ мм. Найдите краевой угол смачивания θ.

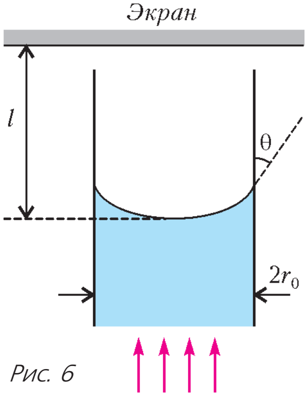


Рис. 6

3. В схеме, изображенной на рисунке 7, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре цепи течет установившийся ток. Определите величину и направление тока I через сопротивление R сразу после замыкания ключа. Известны следующие параметры цепи: ЭДС первой батареи $\mathcal{E}_1 = 10$ В, ее внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление $R = 4$ Ом.

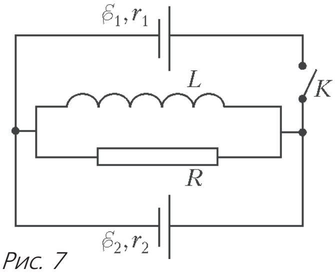


Рис. 7

4. Идеальный газ в количестве ν моль участвует в процессе AB в координатах ρ, T, где ρ – плотность газа, T – температура газа (рис.8). При какой температуре давление газа на 25% меньше максимального? Температура T_0 известна.

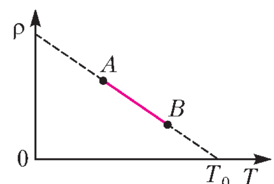


Рис. 8

5. См. задачу 5 для 10 класса.

МАТЕМАТИКА И КРИПТОГРАФИЯ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1 (8–9, 10 классы). На бумажную ленту в строку записан 30-буквенный русский алфавит (Ё=Е, Й=И, Ъ=Ь). Из ленты вырезается фрагмент, содержащий 15 букв (например, от М до Ы). Остальные части ленты располагаются под ним «вверх ногами» так, чтобы на краях получившейся таблицы друг над другом оказались соседние буквы алфавита. Для зашифрования сообщения каждую его

М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы
Л	К	И	З	Ж	Е	Д	Г	В	Б	А	Я	Ю	Э	Ь

букву заменяют на вторую букву, стоящую в том же столбце таблицы. Например, зашифровав слово ДЕПО с помощью таблицы, получим ТСЗИ. Расшифруйте сообщение ЬВЫГВЭВВЕ ГЬЯХЧЯЯ ЯЕЗЫЩЕЯР, полученное указанным способом (возможно, с использованием другой таблицы).

2 (8–9, 10 кл.). Отпирающие комбинации кодового замка представляют собой набор из четырех цифр x_1, x_2, x_3, x_4, каждая из которых равна либо 0, либо 1. Про эти комбинации известно следующее: 1) ровно половина всех наборов открывают замок, 2) если в наборе $x_1 = 1$, то замок откроется в 75% случаев, 3) если $x_1 \cdot x_3 = 1$, то замок откроется в 50% случаев, 4) если $x_4 = 1$, то замок откроется в 25% случаев и 5) если $x_2 + x_3 = 1$, то замок откроется в 62,5% случаев. Найдите все отпирающие комбинации.

3 (8–9, 10 кл.). В тексте, состоящем из 24 букв и записанном без пробелов, буквы переставлены по следующему правилу: 24-я буква поставлена на 1-е место, 1-я буква – на 2-е место, 23-я – на 3-е место, 2-я – на 4-е и так далее (в конце 13-я буква поставлена на 23-е место, 12-я – на 24-е). Затем такую же процедуру повторили еще 85 раз. В результате получилось

ТЯИМАИВУКЦНЛИКАЬЛНЯТПУФИ.

Найдите исходный текст.

4 (8–9, 10 кл.). Для формирования защищенного соединения Алиса, Боб и Стелла используют хранящийся в секрете многочлен с целыми коэффициентами a, b, c вида

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cxy + by + ay^2$$

и целые числа (ключи) k_A, k_B, k_C, которые имеют различные остатки при делении на 83. Чтобы отправить Бобу и Стелле сообщение, Алиса формирует новые ключи k_{AB} и k_{AC} по формулам

$$k_{AB} = r_{83}\left(f\left(k_A, k_B\right)\right),\ k_{AC} = r_{83}\left(f\left(k_A, k_C\right)\right),$$

где $r_{83}(z)$ – остаток от деления числа z на 83. Аналогично, Боб для отправки сообщений Стелле вычисляет $k_{BC} = r_{83}\left(f\left(k_B, k_C\right)\right)$. Известно, что $k_A = 28$, $k_{AB} = k_{AC} = 73$ и при всех целых x выполняется равенство

$$r_{83}\left(f\left(x, k_A\right)\right) = r_{83}\left(x^2 + 61x + 11\right).$$

Найдите ключ k_{BC}.

5 (8–9, 10 кл.). *Латинским квадратом порядка n* называется квадратная таблица из n строк и n столбцов, заполненная натуральными числами от 1 до n таким образом, что каждый столбец и каждая строка не содержат одинаковые числа. Пусть L – латинский квадрат порядка n. Число, стоящее в этом квадрате в строке с номером i и столбце с номером j, обозначим как $L(i, j)$. Два латинских квадрата L_1 и L_2 назовем *ортогональными*, если при их «наложении» не образуется одинаковых пар элементов в разных ячейках таблицы. А именно, если $(i, j) \neq (s, t)$, то

$$\left(L_1(i, j), L_2(i, j)\right) \neq \left(L_1(s, t), L_2(s, t)\right).$$

а) Постройте пару ортогональных латинских квадратов порядка 4. б) Докажите, что множество, состоящее из попарно не ортогональных латинских квадратов порядка n, не может содержать более чем $n - 1$ квадрат.

6 (11 кл.). Чтобы попасть в Криптоландию, необходимо пройти через ворота с электронным замком, предъявив правильный ключ. В микросхеме замка хранится таблица размером 3×8 (3 строки и 8 столбцов), заполненная целыми числами от 1 до 8 так, что в каждой строке этой таблицы встречаются все числа от 1 до 8, а в каждом столбце нет повторяющихся чисел. Такие таблицы принято называть *латинскими прямоугольниками*. Путешественник должен предъявить в качестве ключа латинский прямоугольник размером 4×8. Замок откроется в том и только том случае, если два эти прямоугольника (в памяти замка и предъявленный путешественником) можно единственным способом дополнить до латинских прямоугольников размером 4×8 и 5×8, дописав к каждому из них *одну и ту же* строку. Если это условие не выполняется, т.е. такое дополнение невозможно или неоднозначно, то ворота остаются закрытыми. Катя и Юра

Код замка **Ключ Кати** **Ключ Юры**

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 7 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 3 & 8 & 2 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 8 \\ 8 & 5 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

решили посетить Криптоландию. Определите, чей ключ правильный и почему.

7 (8–9, 10, 11 кл.). Шифратор принимает на вход и выдает на выход 8-битное число

(1 байт). Поданный на вход байт

$$\boldsymbol{x}^{in} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

преобразуется в выходной байт $\boldsymbol{x}^{out}$ за 8 тактов. На 1-м такте входной байт $\boldsymbol{x}^{in}$ преобразуется в байт

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(1)}, x_6^{(1)}, x_7^{(1)}, x_8^{(1)}\right)$$

по формулам

$$x_1^{(1)} = x_2 \oplus k_1, \quad x_2^{(1)} = x_3,$$
$$x_3^{(1)} = x_4 \oplus k_1, \quad x_4^{(1)} = x_5,$$
$$x_5^{(1)} = x_6 \oplus k_1, \quad x_6^{(1)} = x_7,$$
$$x_7^{(1)} = x_8 \oplus k_1, \quad x_8^{(1)} = x_2 x_7 \oplus x_1.$$

Здесь k_1 – секретный ключ 1-го такта ($k_1 \in \{0, 1\}$); $\oplus$ – стандартная операция сложения битов ($0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$). Полученный на 1-м такте байт $\boldsymbol{x}^{(1)}$ на 2-м такте преобразуется в байт $\boldsymbol{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, \ldots, x_8^{(2)}\right)$ по аналогичным формулам $x_1^{(2)} = x_2^{(1)} \oplus k_2, \ldots$ На 8-м такте вычисляется выходной байт $\boldsymbol{x}^{out} = \boldsymbol{x}^{(8)}$. Найдите ключ $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8)$, на котором байт $\boldsymbol{x}^{in} = (0,0,0,0,0,0,0,0)$ преобразуется в байт $\boldsymbol{x}^{out} = (1,1,1,0,0,1,0,1)$.

8 (11 кл.). Даны k различных наборов натуральных чисел, причем каждый набор содержит n натуральных чисел:

$$\boldsymbol{w}_1 = (w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n}), \ \ldots$$
$$\ldots, \ \boldsymbol{w}_k = (w_{k1}, w_{k2}, \ldots, w_{kn}).$$

Наборы $\boldsymbol{w}_i$ и $\boldsymbol{w}_j$ называются различными, если существует натуральное число $m \in \overline{1,n}$ такое, что $w_{im} \neq w_{jm}$. Например, наборы $(1,1,3,1)$ и $(1,1,1,3)$ различны. Докажите, что для каждой пары натуральных чисел n и k существует отображение $\sigma: \mathbb{N} \to \overline{1,k}$ (правило, ставящее в соответствие каждому натуральному числу натуральное число от 1 до k) такое, что наборы

$$\boldsymbol{w}_1^{\sigma} = \left(\sigma(w_{11}), \sigma(w_{12}), \ldots, \sigma(w_{1n})\right),$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{w}_k^{\sigma} = \left(\sigma(w_{k1}), \sigma(w_{k2}), \ldots, \sigma(w_{kn})\right)$$

также будут различны.

9 (11 кл.). Имеется устройство, преобразующее 3-х битовые комбинации в двоичные символы. Известно, что сейчас устройство или работает правильно (режим ПР), или имеет неисправность одного из 3-х типов (Н1, Н2 и Н3). В таблице указано,

Вход	ПР	Н1	Н2	Н3
000	0	1	0	0
001	1	1	1	0
010	1	0	0	0
011	1	0	1	1
100	1	1	1	1
101	0	0	0	1
110	1	1	0	1
111	0	1	0	1

какие символы в зависимости от входа устройство выдает при правильной работе, а также при возможных неисправностях. Какое *наименьшее* количество 3-битовых комбинаций (среди которых обязательно должна быть 111) следует подать на вход, чтобы, проанализировав выходные значения, суметь однозначно определить тип неисправности или же убедиться, что устройство работает правильно? Выпишите все (с точностью до перестановки) такие наборы 3-битовых входов.

10 (11 кл.). При использовании криптосистемы RSA для расшифрования числового сообщения y, где $n = p \cdot q$, p, q – простые числа, находят секретное число d из уравнения $r_{(p-1)(q-1)}(3d) = 1$ ($r_b(a)$ – остаток от деления числа a на b). Известно, что младшие байты чисел y, p, n, $(p-1)\cdot(q-1)$ и d равны `48`,`DB`,`05`,`9F`,`15` (но неизвестно, какому числу какой именно байт соответствует). Найдите d, если n = 64159, y = 5653.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Указание: фигурирующие в задаче числа представимы в виде двух байтов; например, $64159 = 15 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 =$ $=$ `FA 9F` (см. таблицу), `9F` – младший байт числа 64159.

Публикацию по математике и криптографии подготовил С.Рамоданов; по физике — М.Алексеев, В.Попов

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №11)

1. Подойдут, например, слова *тринадцать* и *четырнадцать*.

2. На рисунке 1 показано, как можно разрезать данные фигуры и как сложить из полученных частей квадрат 4×4.

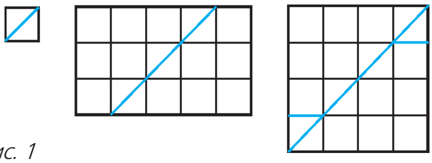


Рис. 1

3. 50.

Оценка. Рассмотрим двух спортсменов, занявших соседние места. Если их обоих не дисквалифицируют, то они по-прежнему будут занимать соседние места, значит, передвинутся на одинаковое количество мест. Таким образом, хотя бы одного из них должны дисквалифицировать. Следовательно, количество дисквалифицированных должно быть не меньше 50.

Пример. Если дисквалифицируют всех спортсменов, стоявших на нечетных местах, то спортсмен, занимавший место с номером $2N$, займет место с номером N. Таким образом, оставшиеся передвинутся на различное количество мест.

4. Шестиклассники выиграли на 3 боя больше.

Пусть перед турниром у всех пятиклассников в сумме было столько же конфет, сколько у шестиклассников, а после каждого боя побежденная команда отдает победителю конфету. Сравним количество конфет у пятиклассников и у шестиклассников после турнира. Ничейные бои и бои между командами одного и того же класса не изменили количество конфет у пятиклассников и шестиклассников. Пятиклассники получили на 7 конфет больше, чем шестиклассники, а отдали на 13 конфет больше, чем шестиклассники. Следовательно, у них стало на 13 − 7 = 6 конфет меньше, чем у шестиклассников. Так как каждый бой, где шестиклассники победили пятиклассников, увеличивает разницу на две конфеты, то таких боев было на 3 больше, чем боев с противоположным исходом.

ЗАДАЧИ

(см. с. 31)

1. Да, можно.

Разберем два случая: Алексей и Борис работают или в одной компании, или в разных. В первом случае Алексей сказал Борису правду, т.е. Алексей действительно работает в фирме «Индекс». Но и Борис тогда сказал правду, т.е. Владимир и Алексей оба работают в фирме «Индекс». Во втором случае Алексей соврал Борису, т.е. Алексей на самом деле работает в фирме «Зугл». Но тогда и Борис соврал, т.е. Владимир и Алексей работают в разных фирмах. Поскольку Алексей работает в фирме «Зугл», то Владимир тогда работает в фирме «Индекс». Итак, в любом случае, Владимир работает в фирме «Индекс».

2. 16.

Посмотрим, как бьются первая и последняя строки (рис.2). Они бьются двумя ладьями, стоящими на цифрах 1. Эти ладьи можно поставить двумя способами, и последующие ладьи нельзя ставить в два средних столбца. Теперь посмотрим, как бьются строки 2 и 7. Они бьются двумя ладьями, стоящими на цифрах 2. Эти ладьи можно поставить двумя способами, и последующие ладьи нельзя ставить в столбцы 3 и 6. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что количество способов равно $2^4 = 16$.

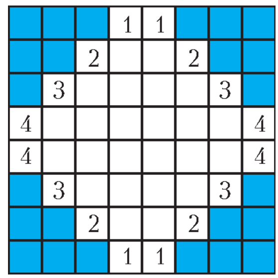


Рис. 2

3. Предположим противное, т.е. пусть могут найтись такие скорость и время, что их сумма, произведение и результат деления скорости на время равны.

Приведем два способа доказать, что время равно 1.

Первый способ. Известно, что равны произведение скорости на время и результат деления скорости на время.

• Если бы время было больше 1, то при умножении скорости на время получилось бы число, большее данной скорости, а при делении скорости на время – меньшее.

• Если бы время было меньше 1, то при умножении скорости на время получилось бы число, меньшее данной скорости, а при делении скорости на время – большее.

Следовательно, время равно 1.

Второй способ. Преобразуем равенство $vt = v/t$ (где v – скорость, t – время). Поделив обе части на v и умножив на t (это можно сделать, потому что $t \neq 0$), получим $t^2 = 1$. Перенесем единицу в левую часть и разложим на множители: $(t-1)(t+1) = 0$. Время не может быть отрицательным, поэтому $t = 1$.

Итак, время равно 1. Но тогда не будут равны произведение скорости и времени и их сумма: если умножить скорость на 1, то она не изменится, а если прибавить 1 – увеличится. Противоречие. Значит, наше предположение неверно и Илья выполнять арифметические операции не умеет.

4. *Первый пример.* Разрежем куб с ребром 2 плоскостью, сечение которой – правильный шестиугольник. Получатся две одинаковые фигуры (рис.3) в виде узловой точки, из которой выходят три отрезка длины 2, а из концов каждого – по два «хвостика» длины 1. Покажем теперь, как из этой фигуры спаять каркас единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Узловую точку поместим в A. Из первого длинного отрезка согнем ломаную ABC, хвостики образуют отрезки CD и CC_1. Второй длинный отрезок даст ломаную ADD_1, хвостики – D_1A_1 и D_1C_1. Третий длинный отрезок пойдет на AA_1B_1, а его хвостики – на B_1B и B_1C_1.

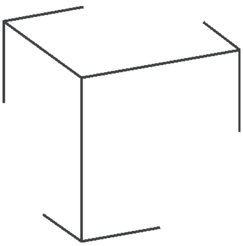


Рис. 3

Второй пример. Разрежем куб с ребром 2, перекусив пополам четыре параллельных ребра. Получатся две одинаковые фигуры в виде «столика» (рис.4): столешница – квадрат 2×2 и четыре ножки длины 1. Покажем теперь, как из этой фигуры спаять каркас единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из столешницы согнем контур $AA_1B_1BCC_1D_1DA_1$, а ножки пойдут на четыре оставшихся ребра.

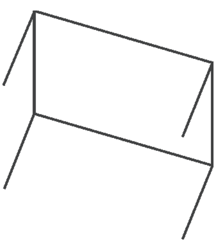


Рис. 4

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №10)

5. Наименьшее число из всех цифр от 0 до 9 – это 1023456789. И оно подходит, так как при умножении на 2 дает число 2046913578, все цифры которого различны.

6. Такой четырехугольник можно нарисовать на клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1). Два примера приведены на рисунках 5 и 6. В обоих примерах четырехугольник составлен из прямоугольника 1×4 и двух прямоугольных треугольников с катетами 3 и 4 (площади $\frac{3\cdot 4}{2}=6$). Из теоремы Пифагора следует, что гипотенуза такого треугольника равна 5 (так как $3^2+4^2=5^2$). Теперь легко убедиться, что площади и периметры этих четырехугольников удовлетворяют условию: $4+6+6=16$, $5+1+5+7=18$.

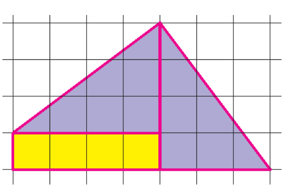


Рис. 5

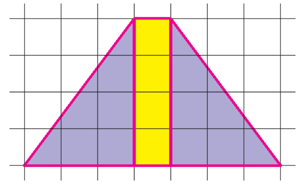


Рис. 6

7. Мысленно расставим все шкатулки по кругу (на равном расстоянии между соседними). Пусть подкупленный работник откроет пару шкатулок, которые находятся на одинаковом расстоянии от шкатулки с алмазом. Такая пара незапертых шкатулок всегда найдется, потому что всего пар 16 (две в пункте *а*), а начальник запер лишь 15 шкатулок (одну в пункте *а*), не считая той, в которой алмаз. Поскольку всего шкатулок нечетное число, для данной пары шкатулок найдется единственная шкатулка на равном расстоянии от них. Поэтому взломщик без труда определит шкатулку с алмазом.

8. Будем называть *одноцветным* отрезок, концы которого одного цвета. Пусть какие-то два таких отрезка не пересекаются. Обозначим их AB и CD, причем пусть A, B, C, D идут в таком порядке при обходе десятиугольника (рис.7). Поменяем цвета вершин B и C между собой. Теперь одноцветными стали пересекающиеся отрезки AC и BD. При этом $AC+BD>AB+CD$. Докажем это. Пусть AC и BD пересекаются в точке O, тогда из треугольников ABO и CDO получаем $AC+BD=AO+BO+CO+DO>AB+CD$. Таким образом, после перекраски вершин увеличивается суммарная длина одноцветных отрезков, а значит, увеличивается и среднее арифметическое их длин m. Будем повторять эту операцию, пока это возможно. Бесконечно выполнять операцию не получится: каждый раз суммарная длина одноцветных отрезков увеличивается, поэтому никакую раскраску нельзя получить повторно, но при этом раскрасок конечное количество.

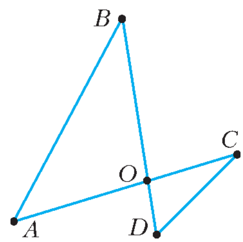


Рис. 7

В итоге, когда больше эту операцию выполнить нельзя, каждые два одноцветных отрезка пересекаются. Рассмотрим любой одноцветный отрезок в этой итоговой раскраске. Раз он пересекается с 4 остальными отрезками, то по каждую сторону от него лежит по 4 вершины десяти-

угольника. Тем самым, каждый одноцветный отрезок делит десятиугольник на 2 шестиугольника. Значит, в итоговой раскраске длина каждого одноцветного отрезка не больше k, тогда и среднее арифметическое их длин m тоже не больше k.
Итак, величину m только увеличивали, и ее конечное значение оказалось не больше k. Значит, и начальное значение было не больше k.

СОСЕДИ НА КЛЕТЧАТОЙ РЕШЕТКЕ

2. $d = \frac{n^2+n}{2} - 1$. **3.** $d = 2n - 1$. **4.** $d = n^2 + \frac{n}{2} + 1$.
5. $d = n + 1$.

ДИФФУЗИЯ: КОГО, КУДА И ВООБЩЕ

1. Максимальную скорость движения атомов в процессе колебаний можно оценить, приравняв тепловую энергию кинетической. Время, соответственно, будет иметь порядок амплитуды колебаний, деленной на эту скорость. Амплитуда – явно не более десятой доли межатомного расстояния. А среднее время перескока оценим как отношение расстояния диффузии, деленное на время диффузии. Цифры возьмем для школьного примера со свинцом и золотом, например 5 лет и 1 мм, впрочем, различие ответов так велико (7 порядков), что конкретные цифры не столь важны.
2. В качестве «метки» можно использовать разные изотопы с разной массой атомов и посмотреть, одинаковые ли результаты получатся. Разница обнаружится. И это видно из ответа на предыдущий вопрос – как только мы произнесли слово «колебания», вспоминается груз на пружине... Скорость диффузии зависит от массы, но для конца Таблицы Менделеева отношение разности масс изотопов к массе атома невелико. Поэтому, в частности, диффузионное разделение изотопов урана так трудоемко. А вот заменять водород дейтерием явно не стоит.
3. Конечно, это шутка – молекулы сами по себе начать двигаться иначе не могут. Но если все же они это сделают, то возможны две ситуации. Если эта часть молекул оторвется и улетит, то мы увидим изменение массы и скорости того, что останется; если это внутренние молекулы, то обнаружим изменение только скорости (при сохранении импульса).
4. Утоньшение проводника влечет увеличение плотности тока и локальный разогрев, который ускоряет самодиффузию.
5. Объем и масса пропорциональны кубу линейных размеров, а поверхность пропорциональна второй степени. Поэтому поверхность фиксированной массы порошка при его измельчении растет обратно пропорционально размеру частиц.
6. От чувствительности конкретного носа к конкретному запаху. Поэтому взгляды собак на диффузию могут отличаться от наших.
7. Для этого один из газов должен быть окрашенным. Знаем ли мы такие газы? Обычно называют бром, хлор, оксид азота IV, озон. Более полный список есть на сайте www.chemport.ru или спросите Google «интенсивно окрашенные газы».
8. Испарение воды тормозится медленной диффузией молекул воды в приповерхностном слое воздуха, причем влияние воздуха ослабевает, если дует ветерок – испаренное сдувается, и нет обратного потока. А побочный процесс – это влияние испарения на температуру жидкости (если она не термостатирована).

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = \frac{m}{M}\sqrt{2gh}$.
2. $a_{\max} = \frac{Ak}{m} = 20$ м/с^2 (поскольку $A \ll l$, колебания можно считать гармоническими).
3. $\frac{W_1}{W} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = 0{,}5$.
4. $\langle v\rangle = \frac{I}{enS} = 5\cdot10^{-5}$ м/с (здесь $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).
5. $N = \frac{I_н}{e} = 3{,}1\cdot10^9$ с$^{-1}$.
6. $T_3 = T_1$ при условии, что $p_1V_1 = p_2V_2$.
7. $\rho = k(2-k)\rho_в = 0{,}36$ г/см^3.
8. $B = \frac{\mu_0 I}{2R^{5/2}}$ (каждый элемент тока Idl витка создает в точке P магнитное поле $dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$, где μ_0 – магнитная постоянная, α – угол, под которым виден этот элемент тока из точки P, r – расстояние между ними).

Вариант 2

1. $A = \frac{(\mu mg)^2}{2k}$.
2. $\Delta\varphi = kq\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = 9$ В (здесь $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2, где ε_0 – электрическая постоянная).
3. $v = \frac{qBR}{m} \approx 10^5$ м/с.

4. $L = \dfrac{CU_0^2 - CU^2}{I^2} = 2$ Гн .

5. $\omega = \dfrac{3}{4}R$ (головная линия соответствует переходу электрона со второго энергетического уровня на первый).

6. $\eta = \dfrac{A - RT_1(n-1)}{A + \dfrac{3}{2}RT_1(n-1)}$. **7.** $T = \rho g S h = 5$ Н .

8. $I = \dfrac{Mgv(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\eta U}$.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

МАТЕМАТИКА

1. Первое число больше второго.

Обозначим

$$A = \left(10^{2017} + 10^{2016} + \ldots + 10 + 1\right)^{2018},$$

$$B = \left(10^{2018} + 10^{2017} + \ldots + 10 + 1\right)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим

$$A = \frac{\left(10^{2018} - 1\right)^{2018}}{9^{2018}}, \quad B = \frac{\left(10^{2019} - 1\right)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим $a = 10^{2018}$. Оценим разность:

$$A - B = 9^{-2018} \cdot \left((a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}\right) = = 9^{-2018} \cdot C .$$

Здесь $C = (a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a-1)^{2017}$. Определим знак C. Увеличим вычитаемое, заменив $10a - 1$ на $10a$:

$$C > (a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a)^{2017} = (a-1)^{2018} - 0{,}9 \cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0{,}9$. Заметим, что $\dfrac{a-1}{a} > \dfrac{a-2}{a-1} > \dfrac{a-3}{a-2} > \ldots > \dfrac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} > \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a-2}{a-1} \cdot \frac{a-3}{a-2} \ldots \frac{a-2018}{a-2017} = = \frac{a-2018}{a} .$$

Далее, $\dfrac{a-2018}{a} > 0{,}9$, так как $0{,}1a > 2018$. Следовательно, разность $\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0{,}9$, а вместе с ней и C положительны. Значит, первое число больше второго.

2. {8,12}.

Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \ldots \cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\ldots \ldots(t_k+1)$. Из условия задачи имеем равенство

$$(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\ldots(t_k+1) = 2^{t_1-1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot \ldots \cdot p^{t_k}. \qquad (*)$$

Заметим, что $2^{t_1-1} > t_1 + 1$ при $t_1 \ge 4$, $3^{t_2} > t_2 + 1$ при $t_2 \ge 1$, …, $p^{t_k} > t_k + 1$ при $t_k \ge 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 1, 2 или 3. Подставляя указанные значения в равенство $(*)$, найдем, что $n = 8$ или $n = 12$.

3. $\dfrac{(2n-3k-3)k}{2}$, где $k = \left[\dfrac{n-1}{3}\right]$.

Количество прогрессий с разностью 1 равно $n - 3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n - 3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n - 6$,… …, количество прогрессий с разностью d равно $n - 3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1 + 3d \le n$ (если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1 + 3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{\max} = \left[\dfrac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно

$$(n-3) + (n-6) + \ldots + (n-3k) = \frac{(2n-3k-3)k}{2},$$

где $k = d_{\max}$.

4. 100 км/ч.

См. рис. 8. По условию, расстояние от C до D равно 20 км. Обозначим расстояние от A до B

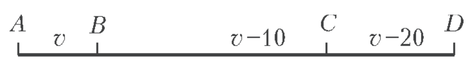


Рис. 8

через x (км), тогда расстояние от B до C составит $(80 - x)$. Пусть v (км/ч) – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках BC и CD она равна $(v - 10)$ и $(v - 20)$ соответственно. По условию, путь от B до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью v, т.е.

$$100 - x = \frac{v}{2} .$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:

$$\frac{80 - x}{v - 10} - \frac{20}{v - 20} = \frac{1}{12} .$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:

$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v > 20$.

5. Пусть p – простой делитель числа a. Тогда из второго условия следует, что b делится на p, а из третьего – что c делится на p. Следовательно, $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на p^{a+b+c}. Пусть n, k, t – наибольшие натуральные числа такие, что a делится на p^n, b делится на p^k, c делится на p^t. Значит, в каноническое разложение произведения abc простое число p входит в степени $n + k + t$. Но, очевидно, $a > n$, $b > k$, $c > t$. Поэтому $a + b + c > n + k + t$ и, следовательно, число $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на p^{n+k+t}. Рассмотрев подобным образом остальные простые делители чисел a, b, c, получим требуемое утверждение.

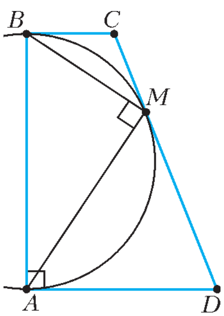


Рис. 9

6. Построим на стороне AB как на диаметре окружность (рис.9). Так как угол BMA прямой, то точка M лежит на этой окружности. Поскольку такая точка M единственная на стороне CD, то CD – касательная к окружности. Следовательно, $BC = CM$ и $AD = MD$.

7. $N = 16$.
Предположим, что, возведя число $a+b\sqrt{3}$ в степень N, мы получили число $A+B\sqrt{3}$ (здесь a, b, A, B – целые). Раскрыв скобки в выражении $\left(a+b\sqrt{3}\right)^N$, получим сумму одночленов (с несущественными для нас сейчас целыми коэффициентами) вида $a^{N-n}\left(b\sqrt{3}\right)^n$. Вклад в коэффициент B дадут те одночлены, у которых показатель n нечетен. Поэтому, если $\left(a+b\sqrt{3}\right)^N = A+B\sqrt{3}$, то $\left(a-b\sqrt{3}\right)^N = A-B\sqrt{3}$. Перемножив равенства $\left(\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 - 2781184\cdot\sqrt{3}$ и $\left(-\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 + 2781184\cdot\sqrt{3}$, получим $(-2)^N = 4817152^2 - 3\cdot 2781184^2$. Показатель N найдем, деля обе части последовательно на 2 (можно, например, сразу поделить каждое слагаемое справа на 256).

8. Представим левую часть в виде $(a+b)^n = a^n + t_{n-1}a^{n-1}b + t_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots t_1 ab^{n-1} + b^n$, где t_k – целые числа, зависящие от n и k, но не зависящие от a и b, и при этом

$$t_{n-1}=t_1, t_{n-2}=t_2, \ldots, t_{n-k}=t_k, \ldots \qquad (*)$$

При $a = b = 1$ имеем

$$2^n = 1 + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots + t_1 + 1. \qquad (**)$$

Таким образом,

$$(a+b)^n = a^n + b^n + t_{n-1}\left(a^{n-1}b + ab^{n-1}\right) + t_{n-2}\left(a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2}\right) + \ldots + t_{n-k}\left(a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}\right) + \ldots$$

Воспользуемся неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом: для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$. Тогда

$$a^{n-1}b + ab^{n-1} \ge 2\sqrt{a^nb^n} > 2,$$

$$a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2} \ge 2\sqrt{a^nb^n} > 2, \ \ldots$$

$$\ldots, a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k} \ge 2\sqrt{a^nb^n} > 2, \ \ldots$$

Учитывая эти неравенства, симметрию коэффициентов $(*)$ и равенство $(**)$, получим требуемое.

9. Пусть O – точка пересечения диагоналей (рис.10). Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\overset{\smile}{CB}$ и $\overset{\smile}{AD}$. В задаче

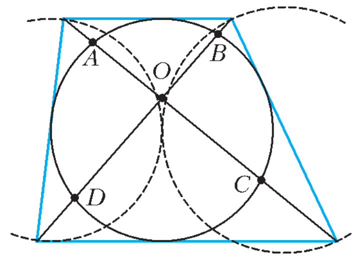


Рис. 10

по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{CB}$ меньше длины половины окружности, т.е. их суммарная угловая мера меньше 180°, а это эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции. Углы AOD и BOC, под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит, сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, т.е. средней линии. Потому окружности имеют единственную общую точку, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\overset{\smile}{BA}+\overset{\smile}{DC}$ больше суммы длин дуг $\overset{\smile}{AD}+\overset{\smile}{CB}$. Утверждение доказано.

10. $\left(\pm 1, \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Левую часть уравнения будем интерпретировать как квадратный трехчлен относительно x. Чтобы корни существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е.

$$D = 4\sin^2 xy - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \sin^2 xy = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 2xy = -1 \Leftrightarrow xy = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Для четных n получаем уравнение $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$, а для нечетных n находим $x = -1$. Левая часть уравнения – четная функция x, поэтому для $x = 1$ и для $x = -1$ соответствующие значения y будут одними и теми же.

11. Нет.

Остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Значит, сумма остатков от деления на 3 всех чисел, разделенных знаками плюс, равна остатку от деления на 3 суммы всех цифр у чисел от 1 до 100. В свою очередь, эта сумма цифр дает при делении на 3 тот же остаток, что и сумма 1 + … + 100 = 5050. Так как 5050 на 3 не делится, то на 3 не делится и сумма из условия задачи. Если число не делится на 3, то оно не делится и на 111.

12. $\pi \cdot \dfrac{7\sqrt{6}-9}{27}$.

Выберем точку M (из условия задачи) так, что $MA = 4$. Тогда точка S будет являться центром шара, описанного около правильного тетраэдра $MABC$. Следовательно, каждая из четырех одинаковых пирамид $SABC$, $SMAB$, $SMAC$, $SMBC$ будет отсекать от шара радиуса 1 с центром в точке S одинаковую часть. Нетрудно подсчитать, что расстояние от точки S до плоскости ABC равно $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Так как $\dfrac{\sqrt{6}}{3}<1$, то для нахождения объема общей части пирамиды $SABC$ и шара радиуса $R = 1$ с центром в точке S нужно из четверти объема шара $\dfrac{1}{3}\pi R^3$ вычесть объем шарового сегмента высотой $h = 1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Как известно, последний находится по формуле $V_c = \pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$. Для $R = 1$, $h = 1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ получаем $V_c = \pi\cdot\dfrac{18-7\sqrt{6}}{27}$. Отсюда искомый объем равен $\pi\cdot\dfrac{7\sqrt{6}-9}{27}$.

13. Будем использовать следующий факт. Пусть натуральное число B делится на 5^n, а его десятичная запись содержит не менее n цифр, т.е. $B = b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0$ и $m \ge n$. Тогда, приписав к десятичной записи числа B произвольные цифры слева, вновь получим делящееся на 5^n число, а именно: число $A = a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_0b_{m-1}b_{m-2}\ldots$ $\ldots b_1b_0$ также делится на 5^n, так как $A = 10^m \cdot a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_0 + B$.

Пусть десятичная запись числа 5^n имеет вид $a_{k-1}\ldots a_1a_0$. Очевидно, что $n \ge k$. Существует нечетное число C такое, что десятичная запись произведения $C\cdot 5^n = b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0$ содержит более n цифр. Например, $C = 2^n+1$, тогда $C\cdot 5^n > 10^n$, а запись числа 10^n содержит n + 1 цифру. (Из нечетности C следует неравенство $b_0 \ne 0$, что далее существенно.)

Рассмотрим число-палиндром

$$V = b_0b_1\ldots b_{m-2}b_{m-1}xb_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0,$$

в котором цифру x выберем так, чтобы сумма всех цифр числа V делилась на 9 (тогда и само V делится на 9). Согласно рассуждениям выше, число V делится на 5^n, а значит, для $N = \dfrac{V}{9\cdot 5^n}$ справедливо равенство $V = 9\cdot 5^n\cdot N$. Таким образом, существование натурального N доказано.

14. $a = \dfrac{145}{44}$, $a = \dfrac{135}{44}$, $a \in \left(\dfrac{63}{20}; \dfrac{13}{4}\right)$.

Первое уравнение системы задает на плоскости ГМТ точек $M(x;y)$, сумма расстояний от которых до точек $A(6;13)$ и $B(18;4)$ равна 15. Заметим, что

$$|AB| = \sqrt{12^2+9^2} = 15.$$

Поэтому, согласно неравенству треугольника, ГМТ таких точек $M(x;y)$ суть точки отрезка AB (рис.11).

Второе уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $S(2a;4a)$ радиуса $\dfrac{1}{2}$ (на

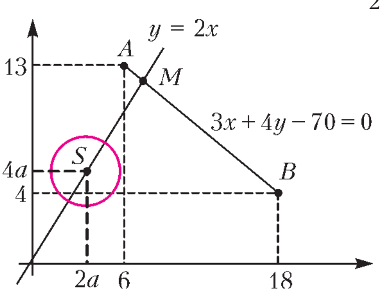


Рис. 11

рисунке 11 она изображена схематически).
Единственность решения системы возможна в том и только том случае, когда окружность пересекает отрезок AB ровно в одной точке.
Очевидно, что гарантированно единственная точка пересечения будет в случае касания окружности и отрезка. Это произойдет тогда, когда расстояние от точки $S(2a; 4a)$ до прямой, содержащей отрезок AB, будет равно радиусу окружности, и точка касания будет попадать в отрезок AB. Уравнение прямой, содержащей AB, как нетрудно установить, имеет вид $3x + 4y - 70 = 0$. Согласно формуле расстояния от точки до прямой (один из вариантов решения):

$$\frac{|3 \cdot 2a + 4 \cdot 4a - 70|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получим два возможных значения параметра a:

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{145}{44}, \\ a = \dfrac{135}{44}. \end{array}\right.$$

Центр окружности лежит на прямой $y = 2x$. Точка $M\left(\frac{70}{11}; \frac{140}{11}\right)$ пересечения прямых $y = 2x$ и $3x + 4y - 70 = 0$ лежит на отрезке AB. Угол OMB острый, поэтому точка касания прямой $3x + 4y - 70 = 0$ и окружности, центр которой лежит под отрезком AB, заведомо на отрезок AB попадет. Это происходит при $a = \frac{135}{44}$. Если же центр S окружности лежит выше отрезка AB (это происходит при $a = \frac{145}{44}$), то требуются дополнительные рассуждения. Точка касания H есть проекция точки $S\left(\frac{145}{22}; \frac{145}{11}\right)$ на прямую, содержащую отрезок AB. Точка H попадет в отрезок AM, если $MH \le AM$. Имеем:

$$MH = \sqrt{SM^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{145}{22} - \frac{70}{11}\right)^2 + \left(\frac{145}{11} - \frac{140}{11}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{11},$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{70}{11} - 6\right)^2 + \left(\frac{140}{11} - 13\right)^2} = \frac{5}{11}.$$

Следовательно, $MH < AM$, и точка касания H лежит на отрезке AB.
В то же время, поскольку $AM < \frac{1}{2}$, единственность решения возможна, когда окружность пересекает отрезок AB, но при этом точка A попадает внутрь круга (рис.12). Так будет происходить с момента пересечения окружности и отрезка в точке A (рис.13) до момента повторного

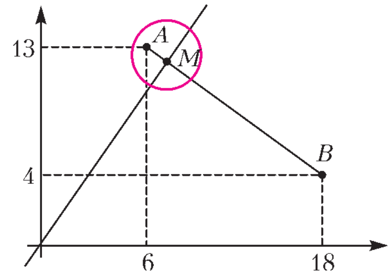


Рис. 12

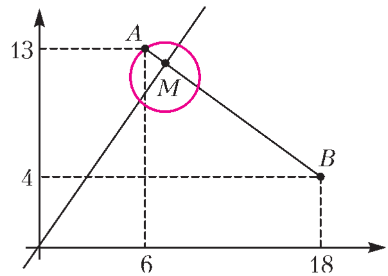


Рис. 13

пересечения в той же точке A (не включая данные моменты).
Найдем такие положения точки $S(2a; 4a)$, при которых расстояние от нее до точки A равно $\frac{1}{2}$.
Имеем:

$$(2a - 6)^2 + (4a - 13)^2 = \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{13}{4}, \\ a = \dfrac{63}{20}. \end{array}\right.$$

Значит, при $a \in \left(\frac{63}{20}; \frac{13}{4}\right)$ точка пересечения будет единственна, как и решение системы уравнений. Окончательно получим: $a = \frac{145}{44}$, $a = \frac{135}{44}$, $a \in \left(\frac{63}{20}; \frac{13}{4}\right)$.

ФИЗИКА

9 класс

1. $\mu = n - 1$. **2.** $a = \dfrac{F^2 \sin 2\alpha}{m(mg + F \sin\alpha)} = 1{,}4\ \text{м/с}^2$.

3. $U = \dfrac{qR}{\tau} = 1\ \text{В}$.

4. $Q = \nu R T_0 \dfrac{n-1}{n} = 1{,}7\ \text{кДж}$ (Q определяется только работой газа при изобарическом процессе).

5. $\tau = \dfrac{v_0\left(v_0\cos\alpha - 2v\right)\sin\alpha}{g\left(v_0\cos\alpha - v\right)}$,

$$L = \frac{v_0^2\left(v_0\cos\alpha - 2v\right)\sin\alpha\cos\alpha}{g\left(v_0\cos\alpha - v\right)}.$$

10 класс

1. $L = \dfrac{v}{4f} = 9{,}66$ см (в трубке возникает стоячая волна, причем у открытого конца пучность, а у закрытого – узел); частота звука не изменится, а изменится тембр.

2. $n = \dfrac{p}{kT} = 0{,}265\cdot10^{20}$ см$^{-3}$ (здесь $k = 1{,}38\times$ $\times10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана); $\langle r\rangle = \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = 9{,}43\cdot10^{-8}$ м (здесь λ – средняя длина свободного пробега молекул, $d = 3\cdot10^{-10}$ м – диаметр молекулы азота).

3. $F_0 = \dfrac{m_1 + m_2 + m}{m_2 + m}T_0$.

4. Искомая сила складывается из силы поверхностного натяжения, направленной перпендикулярно пластине в сторону капли, и силы избыточного давления жидкости, направленной в противоположную сторону:

$$F = \sigma\pi D - \frac{2\sigma}{D}\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\sigma\pi D}{2} = 229\cdot10^{-6}\ \text{Н} = 229\ \text{мкН}.$$

5. $\tau_1 = \dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\left(v_0\cos\alpha - v\right)}$.

11 класс

1. Искомый вектор напряженности направлен перпендикулярно плоскости треугольника $A'B'C'$ вверх.

2. $\cos\theta = \dfrac{r - r_0}{l(n-1)} = 0{,}1$, и $\theta \approx 84°$.

3. Ток через сопротивление направлен справа налево и равен

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 r_2}{r_1 r_2 + R r_1 + R r_2} = 1\ \text{А}.$$

4. $T_1 = \dfrac{1}{4}T_0$ и $T_2 = \dfrac{3}{4}T_0$.

МАТЕМАТИКА И КРИПТОГРАФИЯ

1. МЕНДЕЛЕЕВ ДМИТРИЙ ИВАНОВИЧ.

2. 2, 4, 8, 9, 10, 12, 13, 14.

3. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ.

4. $k_{BC} = 13$.

5. а) Например,

$$L_1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \text{и} \quad L_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}.$$

6. Ключ Юры правильный.

7. 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1.

8. Утверждение доказывается индукцией по числу наборов k.

9. Минимальное количество входных различающих комбинаций ровно 3. Всего различающих наборов 8: 111; 010 или 110; 000, 001 или 101.

10. $d = 42203$.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ»–2018. МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

Первый тур

1. 17.

Из условия следует, что $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n - x_{n+1} = -x_n$, поэтому $x_{n+6} = -x_{n+3} = x_n$, т.е. последовательность периодична с периодом 6.

2. $\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{3}$.

Указание: $\max\left\{x^2, \cos 2x\right\} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < \dfrac{1}{2}, \\ \cos 2x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. 223.

Если искомое число равно x, то из первого предложения следует, что x – нечетное, а из остальных следует, что число $x + 2$ должно делиться на 3, 5 и 9, т.е. имеет вид $5\cdot9\cdot p$. Значит, $x = 45(2k-1) - 2 = 90k - 47$.

4. $\sqrt{5}$.

Проводим EH параллельно AB и вводим обозначения, как на рисунке 14. Тогда $CG = 4b$, искомое отношение равно $t = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$. Из подобия ΔBEG и ΔAED: $\dfrac{x}{a + 5b} = \dfrac{y}{a + b}$,

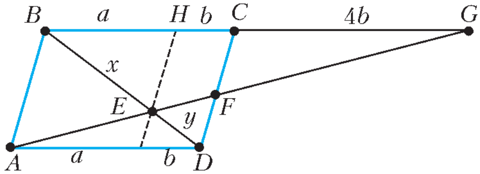


Рис. 14

$$t=\frac{x}{y}=\frac{a+5b}{a+b}=\frac{t+5}{t+1}\Leftrightarrow t^2+t=t+5\Leftrightarrow t^2=5.$$

5. 6056.

Так как

$$\underbrace{11\ldots11}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5=\frac{10^{2017}-1}{9}\cdot 10^{2019}+$$
$$+\frac{10^{2018}-1}{9}\cdot 20+5=\left(\frac{10^{2018}+5}{3}\right)^2,$$

то число из условия задачи равно

$$\frac{10^{2018}+5}{3}=\frac{\overbrace{99\ldots99}^{2018}+6}{3}=\underbrace{33\ldots35}_{2017}.$$

6. 117.

Исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{x\ln 27}{\ln 13}=\frac{27\ln y}{\ln 13}\Leftrightarrow 27^x=y^{27}\Leftrightarrow 3^x=y^9$, при этом $y\geq 1$, а значит, $x\geq 0$. Число 3 простое, поэтому $y=3^n$, где $n\geq 0$, тогда $x=9n$.

7. $\frac{5}{32}$.

Выражение из условия задачи равно

$$\frac{(2x+y)^2+(x+2y)^2-14x-10y+30}{\left(4-(x+5y)^2\right)^{7/2}}=$$
$$=\frac{(2x+y-3)^2+(x+2y-1)^2+20}{\left(4-(x+5y)^2\right)^{7/2}}.$$

Числитель этой дроби не меньше 20, причем равенство достигается при $2x+y-3=x+2y-1=0$, т.е. при $x=\frac{5}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$. При этих же значениях x и y знаменатель достигает своего наибольшего значения $4^{7/2}=2^7=128$.

8. $\frac{\sqrt{11}}{5}$.

Пусть $BC=SA=a$, $AC=SB=b$, $AB=SC=c$. Грани тетраэдра $SABC$ – равные треугольники. Рассмотрим сопровождающий параллелепипед тетраэдра $SABC$ (рис.15), обозначив длины его ребер через x, y, z, тогда $x^2+y^2=c^2$,

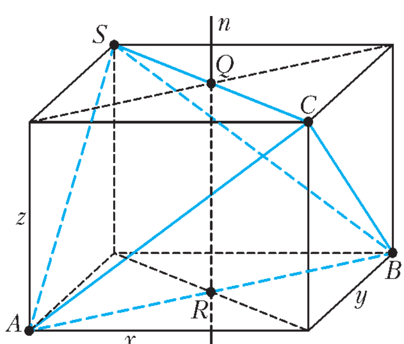


Рис. 15

$y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=a^2$, откуда находим

$$x^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},\ y^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},$$
$$z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Объем сопровождающего параллелепипеда равен

$$V=xyz=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)},$$

а объем исходного равногранного тетраэдра в 3 раза меньше.

Заметим, что тетраэдр $KLMN$ также равногранный. Обозначим (рис.15 и рис.17) через Q и R середины ребер SC и AB, а через F и G – основания биссектрис граней SAB и CAB соответственно. Так как проходящая через точки Q и R прямая n перпендикулярна граням сопровождающего параллелепипеда, то $n\perp SC$ и $n\perp AB$. Повернем тетраэдр $SABC$ на $180°$ вокруг прямой n. При этом тетраэдры $SABC$, $KLMN$ (и параллелепипед, сопровождающий $SABC$) перейдут сами в себя. Так как вершины M и L перейдут друг в друга, то отрезок ML перпендикулярен прямой n и пересекает ее в своей середине – точке D. Аналогично, $KN\perp n$, $E=KN\cap n$, $KE=EN$. Заметим также, что если поменять местами ребра SC и AB, то поменяются местами точки R и Q, а также поменяются местами точки D и E. Из этого вытекает, что $QD=RE$.

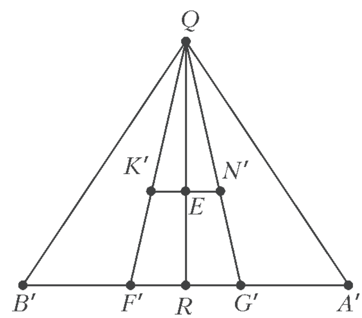


Рис. 16

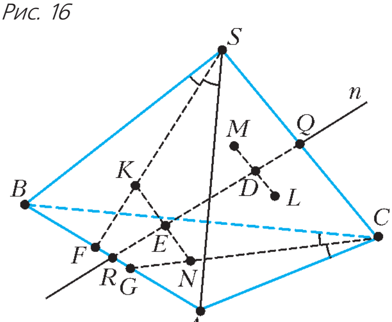


Рис. 17

Рассмотрим ортогональную проекцию тетраэдра $SABC$ на плоскость Π, проходящую через точку Q перпендикулярно ребру SC (рис.16). Точки A', B', F', G', K', N' – ортогональные проекции точек A, B, F, G, K, N на плоскость Π, точка Q – проекция точек S и C, отрезок QR лежит в плоскости Π, и так как R – середина AB, то R – середина $A'B'$, и, аналогично, E – середина $K'N'$, R – середина $F'G'$. Точка K, являясь центром вписанной в треугольник SAB окружности, делит биссектрису SF в отношении $\frac{FK}{FS}=\frac{c}{a+b+c}$. Далее, $\frac{FK}{FS}=\frac{F'K'}{F'S'}$, а так как $KN\perp QR$ и $AB\perp QR$, то $K'N'\perp QR$ и $A'B'\perp QR$. Значит, $K'N'\parallel A'B'$ и $\frac{RE}{RQ}=\frac{F'K'}{F'S'}=\frac{FK}{FS}=\frac{c}{a+b+c}$. Поэтому отрезок DE, соединяющий середины скрещивающихся ребер тетраэдра $KLMN$, совпадает с ребром сопровождающего этот тетраэдр параллелепипеда и равен

$$DE=RQ-RE-DQ=$$
$$=z\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)=z\frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Другие ребра этого параллелепипеда равны $y\frac{b+c-a}{a+b+c}$, $x\frac{a+c-b}{a+b+c}$, а объем тетраэдра $KLMN$ равен

$$V_{KLMN}=\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}V_{SABC}.$$

При $a=8$, $b=7$, $c=5$ получаем $V_{KLMN}=\frac{\sqrt{11}}{5}$.

Замечание. Задачу можно решать также путем нахождения всех ребер тетраэдра $KLMN$.

Второй тур

1. 100023457896.

Число должно делиться на 4 и на 9. Так как сумма десяти разных цифр равна 45, то к ним надо добавить две такие цифры, которые в сумме дают или 0, или 9, или 18. Нам требуется наименьшее число, поэтому добавим 0 и 0.

2. 68.

Если α – данный в условии линейный угол двугранного угла (он всегда тупой), то $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$. Проекция боковой грани на диагональное сечение есть треугольник, площадь которого равна половине площади сечения. Двугранный угол между боковой гранью и диагональным сечением равен $\frac{\alpha}{2}$, поэтому $S_{\text{грани}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}S_{\text{сеч}}$,

$$S_{\text{бок}}=4\frac{S_{\text{сеч}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{2}S_{\text{сеч}}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}=68.$$

3. $4\sqrt[6]{2}$.

При $\cos x\neq-\sin x$ выражение в левой части неравенства равно

$$\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}}{\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}}=\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt[3]{\sin x\cos x}\left(\sqrt[3]{\sin x}+\sqrt[3]{\cos x}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\sin x\cos x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{-\sin x}}.$$

При $x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ оба слагаемых положительны, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{-\sin x}}\geq\frac{2}{\sqrt[6]{-\sin x\cos x}}=$$
$$=\frac{2\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{-\sin 2x}}\geq 2\sqrt[6]{2},$$

причем равенство выполняется только при $x=\frac{7\pi}{4}$. Эта точка для данного в условии выражения не является допустимой, но исходное выражение при x, близких к $\frac{7\pi}{4}$, принимает значения, близкие к $2\sqrt[6]{2}$. Поэтому $\frac{a}{2}=2\sqrt[6]{2}$.

4. 94.

Если число планшетов брендов Lenovo и Huawei равно x и y соответственно, то планшетов Samsung $x+6$, а Apple iPad – $3y$. Из условия: $3y=59+2x$ и $2x+y+6<\frac{1}{3}(2x+4y+6)\Leftrightarrow 4x<y-12$. Из уравнения следует, что $y\geq 20$ и нечетно. Далее, $3y=59+2x<59+\frac{y}{2}-6$, откуда $y\leq 21$. Значит, $y=21$, $x=2$, а общее число планшетов: $2x+4y+6=94$.

5. 1.

Поскольку $2017^{2017}<10000^{2017}$, запись числа 2017^{2017} содержит не более $4\cdot 2017=8068$ цифр, а их сумма $S\left(2017^{2017}\right)$ не превосходит $9\cdot 8068=72612$. Тогда получаем

$$S\left(S\left(2017^{2017}\right)\right)\leq 6+9\cdot 4=42,$$
$$S\left(S\left(S\left(2017^{2017}\right)\right)\right)\leq 3+9=12,$$
$$S\left(S\left(S\left(S\left(2017^{2017}\right)\right)\right)\right)\leq 9.$$

Так как 2016 кратно 9, число $2017^{2017}=(2016+1)^{2017}$ дает остаток 1 при делении на 9. Поскольку сумма цифр числа дает тот же остаток при делении на 9, что и само число, то $S\left(S\left(S\left(S\left(2017^{2017}\right)\right)\right)\right)=1$.

6. $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

Пусть для всех $x \in [1; 3]$ выполняется неравенство $|f(x)| \le \frac{1}{2}$. Если $x = t + 2$, то неравенство $\left|t^2 + (p+4)t + (2p+q+4)\right| \le \frac{1}{2}$ выполняется для всех $t \in [-1; 1]$. Рассмотрим функции $g(t) = \left|t^2 - (at+b)\right|$, $G(a, b) = \max\limits_{t \in [-1;\, 1]} g(t)$ и точки $A = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $B = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $C = \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $D = \left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $E = \left(1; \frac{3}{2}\right)$, $F = \left(1; \frac{1}{2}\right)$ на координатной плоскости Oty (рис.18).

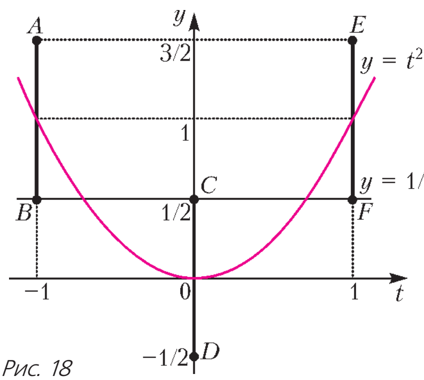


Рис. 18

Прямая $y = at + b$ должна пересекать все три отрезка AB, CD, EF, поэтому она совпадает с прямой $y = \frac{1}{2}$. Значит, для любых a и b имеем $G(a, b) \ge \frac{1}{2}$, причем $G(a, b) = \frac{1}{2}$ только при $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. В нашем случае $p + 4 = 0$, $2p + q + 4 = -\frac{1}{2}$, откуда $p = -4$, $q = \frac{7}{2}$ и $f(x) = x^2 - 4x + \frac{7}{2} = (x-2)^2 - \frac{1}{2}$. Далее,

$$f\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{7}}{2},$$

$$f\left(f\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\right) = f\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right) =$$

$$= \frac{3+\sqrt{7}}{2}, \ldots, \underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)\right)\ldots\right)}_{2017} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

7. $\frac{9}{8}$.

Точка Q является точкой пересечения биссектрис ΔABC. Проведем биссектрису $\angle BAC$, точку ее пересечения с описанной около ΔABC окружностью обозначим буквой L, соединим точки C и Q (рис.19).

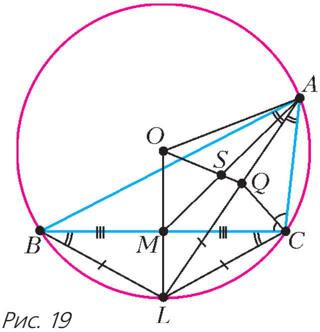


Рис. 19

Поскольку $\angle BAL = \angle CAL = \pi/6$, то $\overset{\smile}{BL} = \overset{\smile}{CL} = \pi/3$, $BL = CL$, ΔBLC – равнобедренный, поэтому прямая LM – серединный перпендикуляр к BC. Значит, точка O тоже лежит на прямой LM.

Дважды применяя теорему Менелая, имеем $\frac{MS}{AS} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{LO}{OM} = 1$, $\frac{QS}{OS} \cdot \frac{OM}{LM} \cdot \frac{AL}{AQ} = 1$. Отсюда $\frac{MS}{AS} \cdot \frac{QA}{OS} \cdot \frac{AL}{QL} \cdot \frac{LO}{LM} = 1$. Так как $\frac{MS}{AS} \cdot \frac{QS}{OS} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а треугольник LOC равносторонний (CM – его высота и медиана, $LO : LM = 2$), то $\frac{4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{AL}{QL} = 1$, откуда $\frac{AL}{QL} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Пусть $\angle ACB = 2\gamma$, тогда $\angle ALC = \angle ABC = 2\pi/3 - 2\gamma$, $\angle BCL = \angle BAL = \pi/6$ и $\angle QCL = \angle QCB + \angle BCL = \frac{\pi}{6} + \gamma$. Тогда $\angle LQC = \pi - \angle QCL - \angle ALC = \frac{\pi}{6} + \gamma$.

Значит, ΔLQC – равнобедренный, $QL = CL$. Тогда по теореме синусов:

$$\frac{AL}{QL} = \frac{AL}{CL} = \frac{\sin\angle ACL}{\sin\angle CAL} = 2\sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{6}\right),$$

откуда $\sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{AL}{QL} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Поэтому

$$\sin\angle ABC + \sin\angle ACB = \sin 2\gamma + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\gamma\right) =$$

$$= \sqrt{3}\sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{8}.$$

8. 2744.

Положим $y = tx$, тогда при натуральных x, y число t рационально. Подставив в уравнение $y = tx$, найдем $x = t^{\frac{t-1}{2}}$, $y = t^{\frac{t+1}{2}}$. Число t может быть только целым. Предположим противное: пусть $t = \frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты, $q \ne 1$. Тогда $y = \frac{px}{q}$, и уравнение примет вид

$$x^{x+\frac{px}{q}} = \left(\frac{px}{q}\right)^{\frac{px}{q}-x} \Leftrightarrow x^{xq+px} = \left(\frac{px}{q}\right)^{px-qx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{xq} = p^{px-xq}\cdot x^{-qx}\cdot q^{x(q-p)} \Leftrightarrow x^{2qx} = \left(\frac{p}{q}\right)^{x(p-q)}.$$

Здесь левая часть целая, а правая – нецелая. Противоречие.

Итак, число t натуральное, поэтому числа x и y будут натуральными только в следующих двух случаях:

1) число t нечетно: $t = 2k - 1$, тогда $x = (2k-1)^{k-1}$, $y = (2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$;

2) число t есть полный квадрат: $t = k^2$, тогда $x = k^{k^2-1}$, $y = k^{k^2+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Сведем полученные решения в таблицу:

t	1	3	4	5	7	9	…
x	1	3	8	25	343	6561	…
y	1	9	32	125	2401	59049	…

Искомая пара: $x = 243$, $y = 2401$.

Заключительный этап

1. $(x^5; y^8)$.

2. Второе.

В самом деле,

$$17^{\frac12}\cdot 13^{\frac14}\cdot 17^{\frac18}\cdot 13^{\frac1{16}}\cdot\ldots\cdot 17^{\frac{1}{2^{2017}}}\cdot 13^{\frac{1}{2^{2018}}} =$$

$$= 17^{\frac12+\frac18+\frac1{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2017}}}\cdot 13^{\frac14+\frac1{16}+\frac1{64}+\ldots+\frac{1}{2^{2018}}} < 17^{\frac23}\cdot 13^{\frac13}.$$

3. $\frac{41}{10}$ или $\frac{41}{8}$.

Если Q – центр окружности, вписанной в ΔACD (рис.20), то AQ и CQ – биссектрисы углов BAC

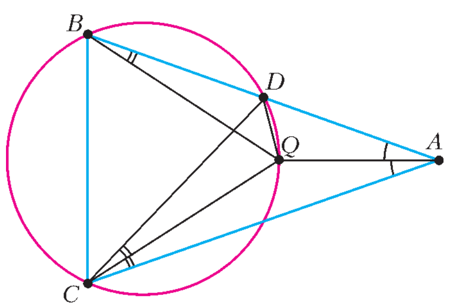


Рис. 20

и ACD соответственно. Так как $\angle DBQ = \angle DCQ$, то $\Delta ABQ = \Delta ACQ$. Значит, $AB = AC$, т.е. ΔABC равнобедренный.

Положим $BC = 2x$, тогда $S_{ABC} = x\sqrt{41-x^2}$. Получаем уравнение $x\sqrt{41-x^2} = 20$, его корни $x = 4, x = 5$. Тогда $R = \frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S} = \frac{41\cdot 2x}{4\cdot 20} = \frac{41x}{40}$.

4. 32.

Пусть x, y – номера альбомов, в которые попали 81-я и 171-я фотографии соответственно, а n – количество страниц в альбоме ($n \ge 5$). Тогда $4n(x-1)+16 < 81 \le 4n(x-1)+20$, $4n(y-1)+8 < 171 \le 4n(y-1)+12$, т.е. $61 \le 4n(x-1) < 65$, $159 \le 4n(y-1) < 163$. Поэтому $n(x-1) = 16$, $n(y-1) = 40$. Значит, n – делитель чисел 16 и 40, не меньший пяти. Отсюда $n = 8$, $4n = 32$.

5. $\left[\cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\cos\frac{8\pi}{25}; \cos\frac{\pi}{5}\right]$.

Обозначим $u = \frac{5}{2\pi}\arccos x$, $v = \frac{10}{3\pi}\arcsin x$. Тогда $4u + 3v = 5$. Решением неравенства $\arcsin u > \arccos v$ является множество $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$, $u^2 + v^2 > 1$, на рисунке 21 оно закра-

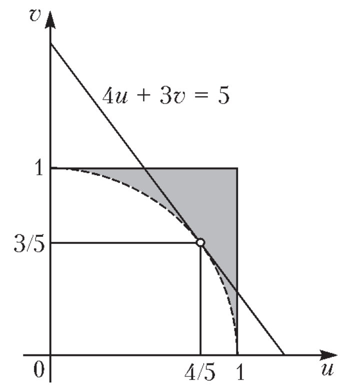


Рис. 21

шено серым цветом. Пересечение прямой $4u + 3v = 5$ с этим множеством есть отрезок с выколотой точкой $u = 4/5$, $v = 3/5$. Значит,

$$u \in \left[\frac12; \frac45\right) \cup \left(\frac45; 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arccos x \in \left[\frac{\pi}{5}; \frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\frac{8\pi}{25}; \frac{2\pi}{5}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\cos\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{8\pi}{25}\right) \cup \left(\cos\frac{8\pi}{25}; \frac{\pi}{5}\right].$$

6. $x_k = 8$ или $x_k = \frac18$, $k = 1, \ldots, n+1$.

После замены $a_k = \frac13\log_2 x_k$, $k = 1, \ldots, n$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_1^{-1} = 2a_2, \\ \ldots \\ a_{n-1} + a_{n-1}^{-1} = 2a_n, \\ a_n + a_n^{-1} = 2a_1. \end{cases}$$

Из неравенства для суммы взаимно обратных чисел следует, что либо одновременно $a_k \ge 1$, либо $a_k \le -1$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Решениями системы являются наборы $a_k = 1$ и $a_k = -1$, $k = 1, \ldots, n$.

Если сложить все уравнения системы, то получим $a_1 - a_1^{-1} + \ldots + a_{n-1} - a_{n-1}^{-1} + a_n - a_n^{-1} = 0$. Левая часть этого равенства больше нуля, если хотя бы одно (а следовательно, и все) $a_k > 1$, и меньше нуля, если хотя бы одно $a_k < -1$, поэтому других решений, кроме вышеуказанных, система не имеет. Найденным двум наборам значений a_k соответствуют два набора $x_k = 2^3 = 8$ и $x_k = 2^{-3} = \frac{1}{8}$, $k = 1, \ldots, n+1$.

7. $\frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Имеем

$$f(x) = 2\sin x \cdot \cos\sin x + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\sin\sin x = g(\sin x),$$

где

$$g(t) = 2t\cos t + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\sin t, \quad t = \sin x \in [-1; 1].$$

Функция g нечетная и $g'(t) = -2t\sin t + \frac{\pi}{2}\cos t$. На множестве $[0; 1]$ производная $g'(t)$ убывает (как сумма двух убывающих функций) и обращается в ноль при $t = \frac{\pi}{4}$. Поэтому $g'(t) > 0$ при $0 \le t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \le 1$. Следовательно, функция $g(t)$ имеет единственный максимум на отрезке $[0; 1]$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$, т.е. $g(t) \le g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$, $t \in [0; 1]$. В силу нечетности функции $g(t)$ ситуация на отрезке $[-1; 0]$ симметричная. Покажем, что $g(-1) < g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Действительно,

$$g(-1) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sin 1 - 2\cos 1 = 2\sin 1\left(1 - \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} 1\right) <$$

$$< 2\sin 1\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, наибольшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, а значит и функции $f(x)$ на всей числовой прямой, равно $\frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

8. а) 810; б) 14580.

а) Искомые числа должны быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, причем в каждом числе сумма цифр не должна быть кратной 3. Цифры 1, 4 и 7, назовем их цифрами множества *A*, при делении на 3 дают остаток 1, а цифры 2, 5, 8, цифры множества *B*, дают остаток 2. Удовлетворяющее условию число должно быть составлено одним из четырех способов: 1) 4 цифры из множества *A*; 2) 4 цифры из множества *B*; 3) 3 цифры из множества *A* и 1 цифра из множества *B*; 4) 3 цифры из множества *B* и 1 цифра из множества *A*. Всего таких чисел будет $3^4 + 3^4 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4 = 10 \cdot 3^4 = 810$.

б) Для поиска общей суммы цифр всех этих чисел разобьем их на пары: второе число получается из первого заменой всех цифр по принципу $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 7$, $4 \leftrightarrow 5$. Например, число 1545 имеет пару 8454, число 5271 имеет пару 4728 и т.д. Сумма цифр любой пары равна $9 \cdot 4$, а число таких пар равно $\frac{10 \cdot 3^4}{2}$. Значит, искомая сумма всех цифр равна $\frac{9 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 3^4}{2} = 14580$.

НАПЕЧАТАНО В 2018 ГОДУ

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

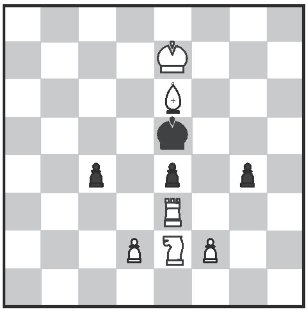
Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: +7 916 168-64-74
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Телефон: +7 495 363-48-86,
http: //capitalpress.ru

НовогодниЕ СЮЖЕТЫ

Приближаются новогодние каникулы, и поэтому сегодняшний выпуск шахматной странички традиционно посвящен праздничным задачам.

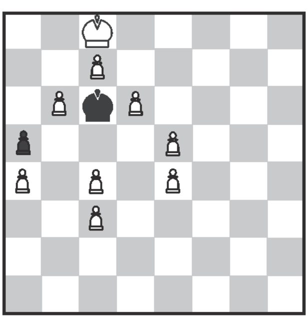
Т.Доусон, мат в 2 хода



Чаще всего в своих новогодних произведениях шахматные композиторы изображают ель и свечу. Одним из пионеров в этой области был английский проблемист Т.Доусон. На двухходовке (1924 г.) мы можем увидеть рождественский подсвечник. Для ее решения необходимо найти угрозу мата: **1. ♖a3! e3** (ходы другими пешками также ведут к мату после 2. ♖a5) **2. ♖e3×**.

Регулярно освещает рождественскую тему в своем творчестве шахматный композитор и один из старейших гроссмейстеров современности Пал Бенко, отметивший в этом году 90-летний юбилей.

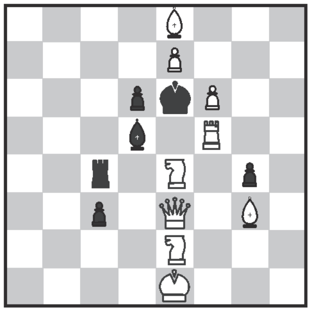
П.Бенко, мат в 3 хода



Глядя на эту трехходовку, легко узнать праздничное хвойное дерево.

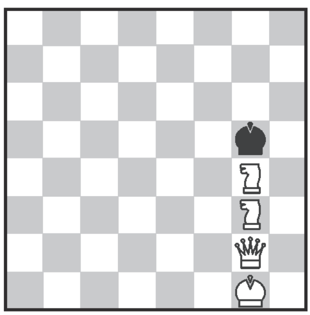
1. ♔b8 ♚b6 (1…♚c5 2. c8♕+ ♚b6 3. c5×) **2. c8♖!** Превратиться нужно именно в ладью, чтобы избежать пата **2… ♚a6 3. ♖c6×.**

П.Бенко, мат в 2 хода



Несмотря на большое количество фигур, эта двухходовка решается довольно легко при помощи жертвы ферзя: **1. ♕c5!** (с угрозой 2. ♕d5×) **dc 2. ♖e5**. Другие взятия также ведут к мату: 1…♜c5 2. ♘d4×; 1…♝e4 2. ♘f4×.

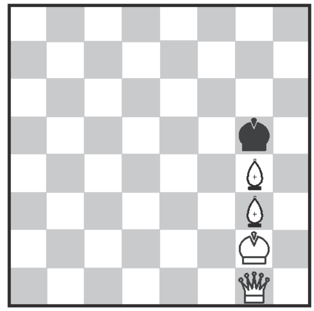
П.Бенко, мат в 3 хода



В силу простоты изображения, возможна масса вариаций на тему рождественской свечи. Алгоритм решения подобных задач заключается в поиске максимально ограничивающих короля ходов, оставляющих ему минимально возможное количество свободных полей.

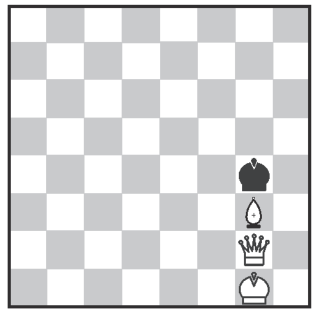
1. ♕e4 ♚h4 2. ♕f4 ♚h3 3. ♘f2×.

П.Бенко, мат в 2 хода



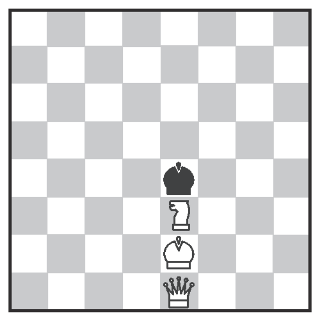
1. ♕b6 ♚g4 2. ♕g6×.

П.Бенко, мат в 4 хода



1. ♕d5 ♚g3 (1…♚h3 2. ♔f2 ♚g4 3. ♕a5 ♚h3 4. ♕h5×) **2. ♕e4 ♚h3 3. ♔f2 ♔h2 4. ♕g2×.**

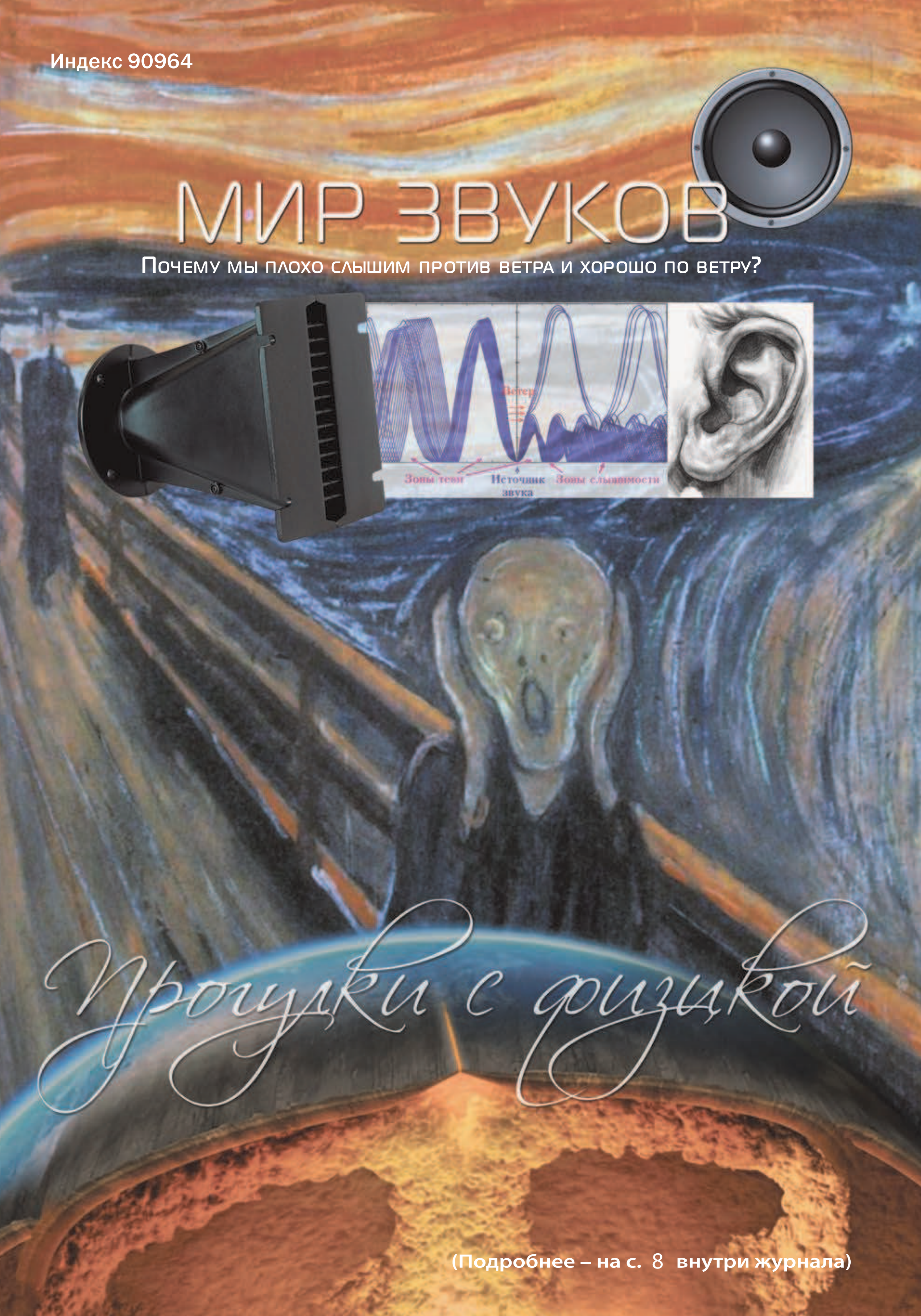
П.Бенко, мат в 4 хода



1. ♕a5 ♚d4 (1…♚f4 2. ♕f5+ ♚g3 3. ♕g4+ ♚h2 4. ♕g2×) **2. ♔d2 ♚e4 3. ♕f5+ ♚d4 4. ♕d5×.**

Шахматная страничка желает своим читателям счастливого Нового года и побольше увлекательных шахматных сражений в наступающем году!

А.Русанов



(Подробнее – на с. 8 внутри журнала)